ANALOG DEVICES

TNJ-034
アナログ電子回路技術ノート

「$e^{j\omega t}$とは」を考えるなかで出会うイメージ除去ミキサや超高速 ADC
（後編：高速 ADC の DIGITAL DOWN CONVERT で考える）

著者: 石井 聡

はじめに

この技術ノートは、「$e^{j\omega t}$」に関する話題の後編（最後）としてお届けするものです。

前編 TNJ-032 では、複素信号がナニモノかを考え、オイラーの公式をあらためて味わっていきながら、回路理論での計算で、現実世界の正弦波と複素信号とをどのようなかたちで考えていくことができるか示していきました。その前編で、複数回の「なぜなぜ」を繰り返す過程の結果として、「すいません降参です」と、いつかは答えられない状況に陥るというお話もさせていただきました…。

つづいて中編 TNJ-033 では、前編での考察をもとに、現実の回路として、「すいません降参です」とした複素信号が、どのように実際に用いられているかをアナログ信号での複素ミキシングである「イメージ除去ミキサ」を例にして、その考え方をご紹介しました。

この後編の技術ノートでは、「すいません降参です（くどい…）」の複素信号に関して、高速 ADC のデータシートの中で見つけた信号表現と、その理論的な考え方をご紹介していきたいと思います。

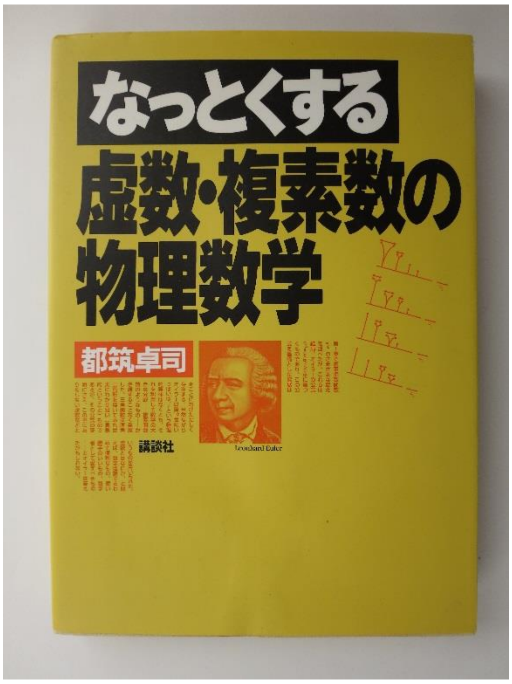

図 1. 都築卓司; なっとくする虚数・複素数の物理数学, 講談社
ううむ、ここでも…。

青い草鞋を脱いだあとに読んだ物理数学の本

前編でお話した、2002 年の春にいただいた禅問答「『$e^{j\omega t}$』とは何か」について、履きなれない青い壱足を脱いだあとも気になっており、実はずっと考えていました。「禅問答」としてしまうと、その方には失礼なのかもしれません。それでもその問答の本質をずっと探していたのでした。

とある日、何を思い立ったか（たぶん電磁気学の勉強のため）図 1 の本を買い（参考文献[1]）、読んでいました。そこの中に、それも最後の最後に、書いてあるわけですよ…。

〔以下同書籍の本文最終ページより引用〕

『非対角線要素が虚数になる……といわれてもどうしようもない。（中略）やはり虚数は手に負えそうもない……。（中略）やはりこれが、もっとも「理にかなった数学的表現だ」というものが解答である』

驚いたというか、なんというか。前編で「わかってねーな」ということを書きましたが、この筆者（理学博士。横浜市立大学名誉教授。すでに逝去）の方が、それこそ「わかってねーな」なんということはないと思います（大変失礼）。

これから類推できることは「結局は、実は、誰にも分からない」ということでしょうか。やはり、もしかすると、「4 次元空間は**どのように描けますか？**」という質問とも、ほぼ同義かもしれません。もしかすると実は……「『$e^{j\omega t}$』とは何か」は、誰にも説明できないものなのかもしれません…。

超高速 ADC での複素ミキシングとは

とある日、とある代理店の、とある FAE の方から質問がありました。「AD9680 という 14 ビットの 1.25Gsps のデュアル ADC がありますよね」。その AD9680 は、

AD9680: A/D コンバータ、14 ビット、1.25GSPS/1GSPS/820 MSPS/500MSPS、デュアル、JESD204B

http://www.analog.com/jp/ad9680

【概要】

AD9680 は、デュアル、14 ビット、1.25GSPS/1GSPS/820MSPS /500MSPS の A/D コンバータ（ADC）です。デバイスは、オンチップのバッファ回路とサンプル&ホールド回路を備えており、低消費電力、小型サイズおよび使い易く設計されています。このデバイスは、最大 2GHz までの広帯域幅アナログ信号をサンプリングするように設計されています。AD9680 は、小型パッケージ内に、広い入力帯域幅、高サンプリング・レート、優れた直線性および低消費電力と最適化されています。

デュアルの ADC コアは、マルチステージの差動パイプライン・アーキテクチャを採用し、出力誤差補正ロジックを内蔵しています。各 ADC は、ユーザー選択可能な多様な入力範囲

Rev. 0

アナログ・デバイセズ株式会社
本　　社／〒105-6891 東京都港区海岸 1-16-1 ニューピア竹芝サウスタワービル
電話 03（5402）8200
大阪営業所／〒532-0003 大阪府大阪市淀川区宮原 3-5-36 新大阪トラストタワー
電話 06（6350）6868

をサポートする広帯域幅入力となっています。リファレンス電圧を内蔵しているため設計が容易です。

アナログ入力とクロック信号は、差動の入力となっています。各 ADC データの出力は、2 つのデジタル・ダウンコンバータ（DDC）に内部で、接続されています。各 DDC は、5 段にカスケードされた信号処理段：12 ビットの周波数変換（NCO）と 4 つのハーフ・バンド・デシメーション・フィルタで構成されています。DDC はデフォルトでバイパスされます。

（後略）

という、たしかに超高速な（実際にはさらに高速な製品もありますが）ADC です。ましてや高速シリアル I/F JESD204B が採用されている、だいぶ高度なものです。質問はつづきます…。

Digital Down Converter; DDC について

「Rev. 0 のデータシートになりますが、この Figure 51～53 に DDC（Digital Down Converter）を用いた周波数変換動作が説明されていますよね。ふつうはふたつの周波数f_1, f_2を乗算して周波数変換すると、（TNJ-032 の図 3 や図 4 の説明のように）f_1, f_2の引き算の周波数と足し算の周波数にスペクトルが現れますよね。」

「でも、これらの Figures はどう解釈すればいいのでしょうか？」

なるほど…。データシートを見てみると、たしかに複雑な図が描かれています…。図 2 は AD9680 のデータシート Rev. 0 の Figure 51 から抜粋したものです。この図 2 ではプラスの周波数スペクトル「だけ」が複素周波数変換により、低い周波数の信号（DC に近い信号）に変換されています。これを図 2 では赤い矢印で示してみました。

それではひとつひとつ、その FAE の方の質問への回答として、この周波数変換動作のステップを考えてみましょう。

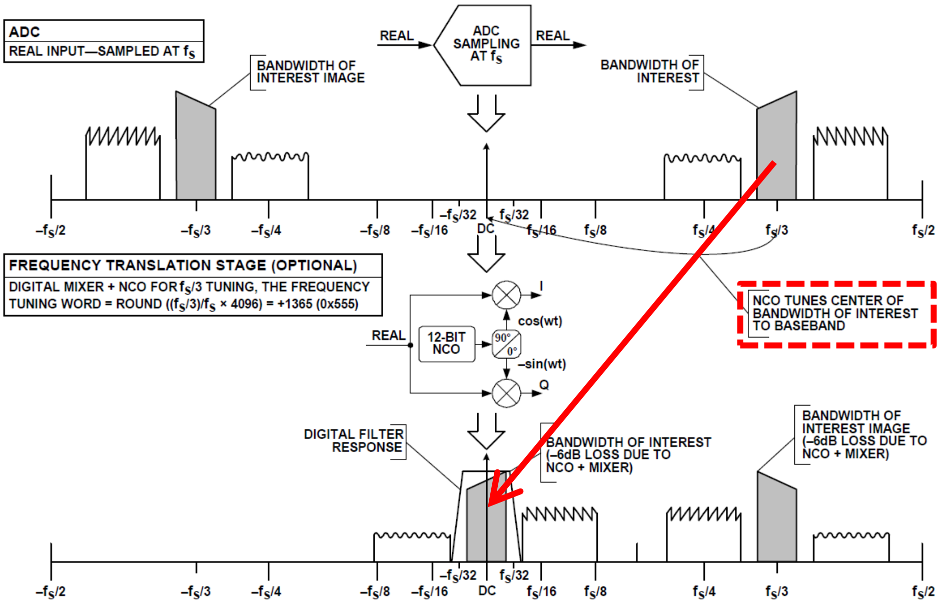

図 2. AD9680 のデータシートの Fig. 51 に記載されている周波数変換動作の説明

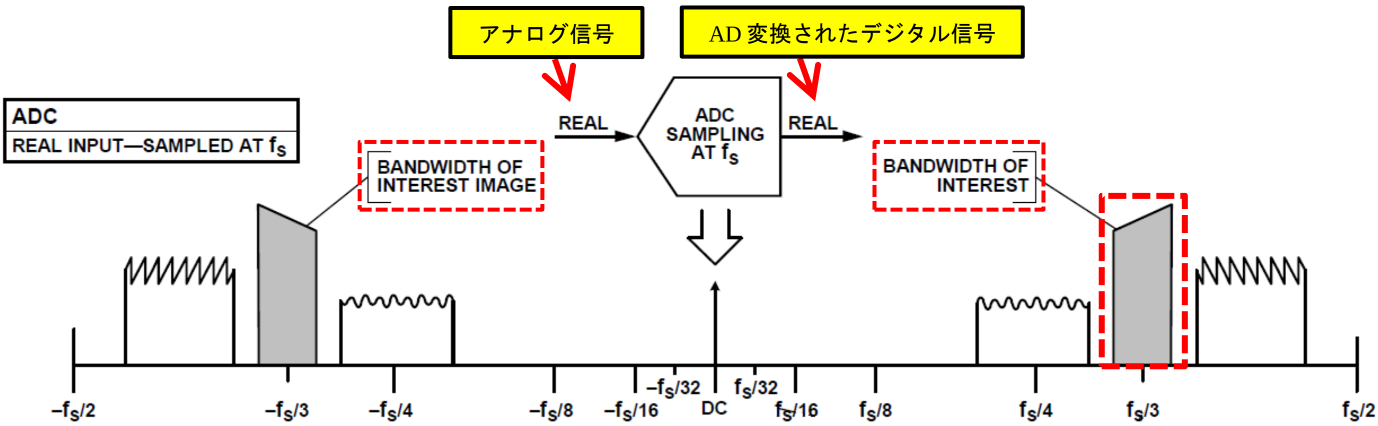

図 3. データシート Fig. 51 のステップ①
まず最初は ADC サンプリング動作によりゼロ周波数を中心としたスペクトルを示す

ADC の AD 変換動作と周波数変換動作

図 2 の AD9680 による AD 変換動作の部分を、あらためて図 3 に抜き出してみました。基本的な話しとして、ここまでの技術ノート TNJ-032、 TNJ-033 での説明のように、AD 変換（サンプリング）された信号「REAL」Rは、ゼロ周波数を中心としたプラス側の周波数とマイナス側の周波数に、ふたつのスペクトルとして現れます。

図 3 では入力信号の周波数を$+f_S/3$（f_S [Hz]はサンプリング周波数）、そして変調信号などを想定して中心周波数に対して帯域幅があるかたちとなっています。そのスペクトルがプラスの周波数軸上（$+f_S/3$）には「BANDWIDTH OF INTEREST」として本来の信号という意味合いで表記され、マイナスの周波数軸上（$-f_S/3$）には「BANDWIDTH OF INTEREST IMAGE」としてイメージ周波数の成分という意味合いで表記されています。ここまでの説明、そしてデジタル信号処理理論の視点からは、実際はどちらの信号も「本来の信号」といえるものです。

図 3 では ADC の入力側も「REAL」、出力側も「REAL」ではありますが、どちらも同じもので、入力側が「アナログ信号としての REAL」R、出力側が「デジタル（離散）信号としての REAL」Rという意味です。

NCO と数値乗算回路で出来ている DDC

つづいて図 4 のように FREQUENCY TRANSLATION STAGE として、周波数変換動作が NCO（Numeric Controlled Oscillator）と数値乗算回路を用いて行われます。NCO とは正弦波の数値を発生するデジタル回路で、日本語とすれば「数値制御発振器」となります。ある設定値（設定周波数に比例するもの。Frequency Tuning Word; FTW とも呼ばれます）を NCO に加えると、その設定値に比例した周波数に相当する正弦波の値を出力してくれます。AD9680 で NCO は 12 ビット・ワード幅になっています。

数値乗算回路のほうは TNJ-032、TNJ-033 でも説明した、ミキサと同じ動作をするものです。AD 変換（サンプリング）されたデジタル信号「REAL」Rが数値乗算回路に入力され、NCO 出力はミキサでいうところの局部（ローカル）発振信号とまったく同じく機能します。この図 4 の周波数変換回路を拡大してあらためて図 5 として見てみます。AD 変換された REAL という信号Rは、局部（ローカル）発振信号 $\cos(\omega t)$と$-\sin(\omega t)$とで、I と Q という『ふたつの系統』に 2 分割されていることが分かります。

ちなみに、この I という系統は「In-Phase（同位相）」、Q という系統は「Quadrature-Phase（直角位相）」という表現からきています。

この図 5 の回路が複素周波数ミキサとか、DDC（Digital Down Converter）とか呼ばれるものです。

ここで In-Phase（同位相）を基準とすれば、Quadrature-Phase（直角位相）はそれこそ 90° 位相がずれているわけですから、I 系統で得られた信号Iを実数部として、もうひとつの『別の系統』Q 系統で得られた信号Qを虚数部として、REAL の入力信号Rを周波数変換した結果として

$$S = I + jQ \qquad (1)$$

このように複素数の変換結果Sが実現されるわけです。つまり複素数（実数／虚数）というのは『別のふたつの系統』を一つの式（数値）で表せるということなんですね。

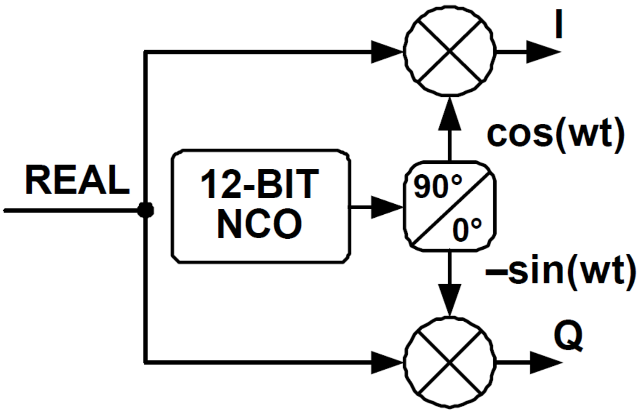

図 5. AD9680 の複素周波数ミキサ（DDC）。NCO は 12bit ワード幅になっている

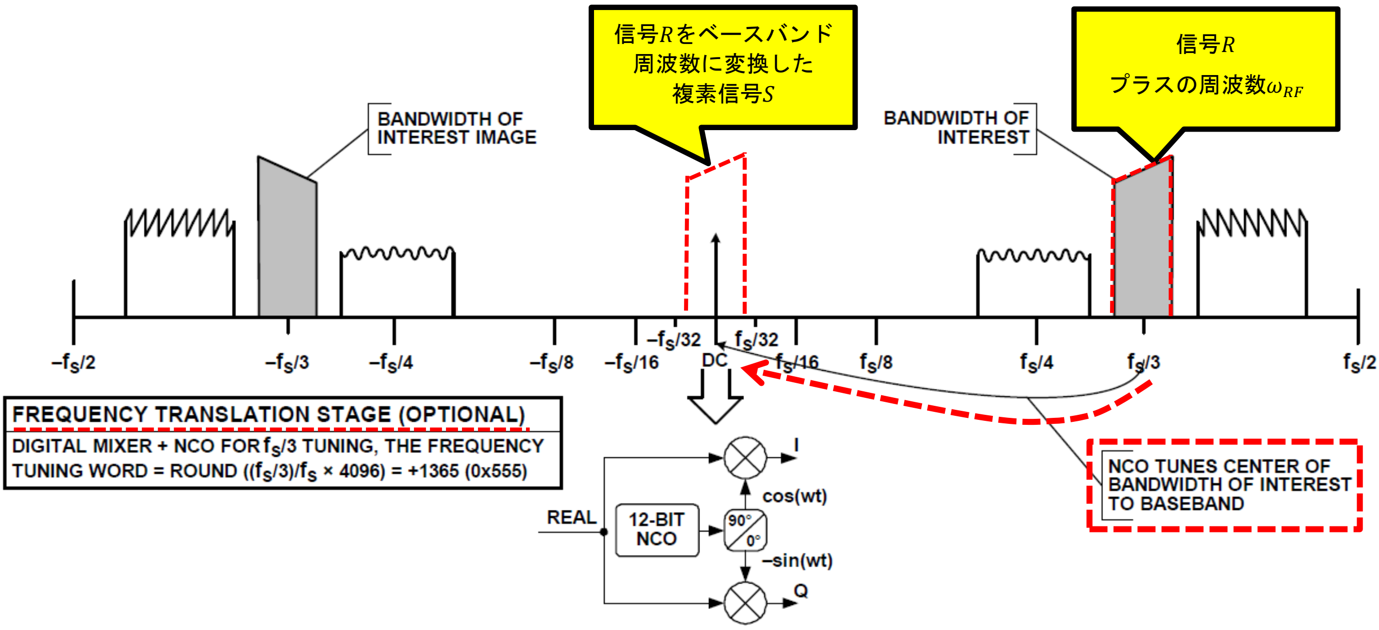

図 4. データシート Fig. 51 のステップ②
FREQUENCY TRANSLATION STAGE（周波数変換段）の説明

別のいいかたをすると、図 5 で得られるふたつの信号I, Qは、複素ミキシングにより得られた「複素数となるひとつの信号情報S」になります。

NCO と数値乗算回路による複素周波数変換動作

図4にも「NCO TUNES CENTER OF BANDWIDTH OF INTEREST TO BASEBAND」と記載がありますが、これは AD 変換したデジタル信号「REAL」が、NCO で生成される I 系統、Q 系統それぞれのデジタル値と乗算され、低い周波数の信号（DC に近い信号）に変換されることを意味します。この変換を図 4 に矢印でも示してみました。

無線通信や電波による放送をイメージしてもらいたいのですが、このデジタル信号「REAL」は「CENTER OF BANDWIDTH OF INTEREST（希望波の帯域幅の中心）」を中心とした無線変調波として、本来の伝送情報成分を含んでいるものです。この伝送情報自体のことを「BASEBAND」と呼び、日本語でも「ベースバンド信号」（より日本語的には「基底信号」）と呼びます。つまり図 4 は無線変調波が、低い周波数の信号、DC に近い信号として「BASEBAND 信号」に変換（TUNE）される動作を意味しているわけです。

あらためてもう一度、これまでの説明をもとに「なぜ I 系統と Q 系統で複素信号になるのか」を式で考えてみましょう。

図 4 に入ってくる信号 REAL は正弦波で表されるものとし、これを角周波数ω_{RF}の信号Rとして、

（以下は式が長いので一段組みで表示してあります）

$$R = A\cos(\omega_{RF}t) = \frac{A}{2}[\exp(j\omega_{RF}t) + \exp(-j\omega_{RF}t)]$$

と表し、I 系統の NCO（ローカル）出力 $\cos(\omega t)$を

$$\cos(\omega_{LO}t) = \frac{A}{2}[\exp(j\omega_{LO}t) + \exp(-j\omega_{LO}t)]$$

また Q 系統の NCO（ローカル）出力$-\sin(\omega t)$を

$$-\sin(\omega_{LO}t) = -\frac{A}{j2}[\exp(j\omega_{LO}t) - \exp(-j\omega_{LO}t)]$$

とすれば（ここでω_{LO}は NCO の発生する角周波数）、まず I 系統の掛け算では、

$$\begin{aligned} I &= A\cos(\omega_{RF}t)\cdot\cos(\omega_{LO}t) \\ &= \frac{A}{4}[\exp\{j\cancel{(\omega_{RF}+\omega_{LO})}t\} + \exp\{-j(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\} + \exp\{j(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\} + \exp\{-j\cancel{(\omega_{RF}+\omega_{LO})}t\}] \end{aligned}$$

この結果がデジタル・ローパスフィルタを通り、斜線の高域信号成分が取り去られるとすれば

$$I = A\cos(\omega_{RF}t)\cdot\cos(\omega_{LO}t) = \frac{A}{4}[\exp\{-j(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\} + \exp\{j(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\}] \tag{2}$$

つづいて Q 系統の掛け算では、

$$\begin{aligned} Q &= A\cos(\omega_{RF}t)\cdot\{-\sin(\omega_{LO}t)\} \\ &= -\frac{A}{j4}[\exp\{j\cancel{(\omega_{RF}+\omega_{LO})}t\} + \exp\{-j(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\} - \exp\{j(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\} - \exp\{-j\cancel{(\omega_{RF}+\omega_{LO})}t\}] \end{aligned}$$

この結果もデジタル・ローパスフィルタを通り、斜線の高域信号成分が取り去られるとすれば

$$Q = A\cos(\omega_{RF}t)\cdot\{-\sin(\omega_{LO}t)\} = -\frac{A}{j4}[\exp\{-j(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\} - \exp\{j(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\}] \tag{3}$$

が得られます。この Q 系統は「I 系統とは別。別次元だ」という意図をこめて、そしてこれまでのこの技術ノートでの複素数の説明からご理解できるように「虚数『j』の軸」だとして、そして全体が

$$S = I + jQ$$

で表されるのだと考えると、Sは（$-jA/j4 = -A/4$から）

$$\begin{aligned} S &= \underbrace{\frac{A}{4}[\exp\{-j\cancel{(\omega_{RF}-\omega_{LO})}t\} + \exp\{j(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\}]}_{I\ 〔式(2)〕} - \underbrace{\frac{A}{4}[\exp\{-j\cancel{(\omega_{RF}-\omega_{LO})}t\} + \exp\{j(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\}]}_{jQ\ 〔式(3)〕} \\ &= \frac{A}{2}[\exp\{j(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\}] \end{aligned} \tag{4}$$

として、たしかにプラスの周波数$+\omega_{RF}$のみを周波数変換段でベースバンド周波数に変換した、複素信号Sになることが分かります。

別のいいかたをすると、ここで得られた複素信号Sには、マイナスの周波数$-\omega_{RF}$の成分は含まれていないことになります。すなわち信号「REAL」の片側、プラス側だけの周波数スペクトラムが、低い周波数の信号（DC に近い信号／ベースバンド信号）に変換されることになるわけです。

これが図 6 の中心に見える「BANDWIDTH OF INTEREST」なわけです。また「-6dB LOSS」というのは、式(4)に$A/2$の項がありますが、この

$$20\log\frac{1}{2} = -6\text{dB}$$

ということを示しているわけです（"DUE TO NCO + MIXER"は「NCO とミキサにより」という意です）。

アナログ電子回路技術ノート　TNJ-034

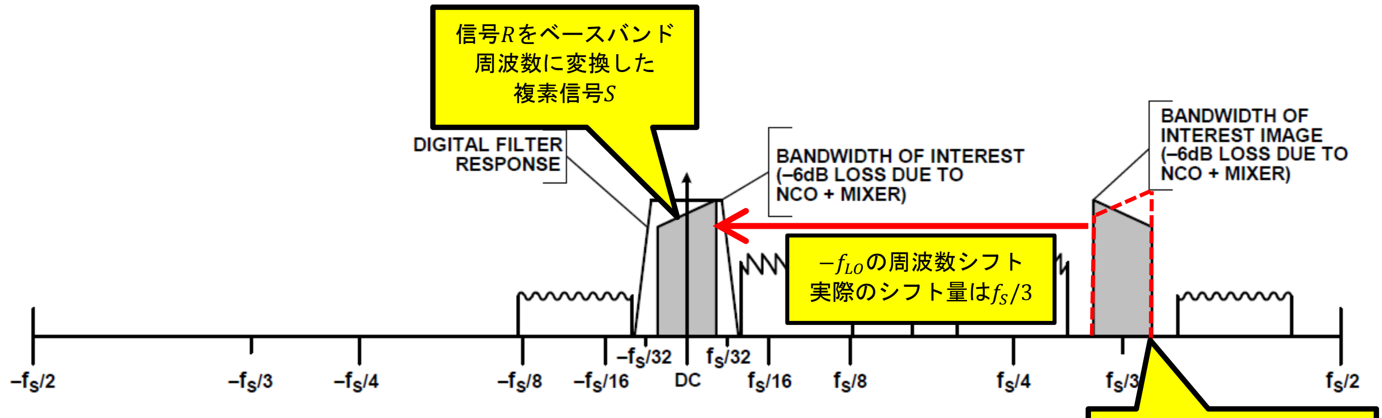

図 6. データシート Fig. 51 のステップ③
プラス側だけの周波数スペクトラムが低い周波数の信号
（DC に近い信号／ベースバンド信号）に変換される

NCO の 2 信号自体も複素周波数変換動作の元なんだ

これら図 4 や図 6、そしてここまでの式を見ていくと、複素ミキシングとして DDC は、（振幅成分は考えずに角周波数の成分としては）正弦波の希望波Rのうちプラスの周波数成分

$$R_+ = \exp(j\omega_{RF}t) \tag{5}$$

を

$$S = \exp[j(\omega_{RF} - \omega_{LO})t] \tag{6}$$

に変換するプロセスであることが分かります。

またこのプロセスは、ローカル信号をLとすれば

$$S = R_+ \cdot L$$

です。ここで、ここまでの式からLを求めてみます。式(6)は

$$S = \exp(j\omega_{RF}t) \cdot \exp(-j\omega_{LO}t) \tag{7}$$

と変形でき、この右項の乗算 1 項目は式(5)のR_+と同じなので、

$$L = \exp(-j\omega_{LO}t) \tag{8}$$

これは極座標上をマイナス方向に角周波数ω_{LO}で回転する複素信号です。

一方で DDC の数値乗算回路の I 相、Q 相に実際に加わるふたつのローカル信号は$\cos(\omega t), -\sin(\omega t)$です。これらを上記の周波数変換の説明と同じように、Q 系統は「I 系統とは別。別次元のもの」、そして「虚数『j』の軸」だとすれば、ふたつのローカル信号はひとつの複素ローカル信号として

$$L = \cos(\omega_{LO}t) - j\sin(\omega_{LO}t)$$

ここでオイラーの公式を使ってみれば

$$L = \exp(-j\omega_{LO}t) \tag{10}$$

なんですね。式(8)と同じです。DDC はまさしく「希望波を$-\omega_{LO}$だけシフトする動作」の複素ミキシングをしていることになるわけです。

これを図 6 に、『赤の点線で示した希望波』のスペクトルが『$-f_{LO}$だけ周波数シフト』されるようすとして矢印で示します。なおこの図 6 は、横軸が「角周波数」ではなく「周波数」なので、

$$-f_{LO} = -\frac{\omega_{LO}}{2\pi} \tag{11}$$

で周波数として表記しています。でも、しかし…、なのです…。そのとある日の、とある代理店での、とある FAE の方からの質問は続くのでありました。

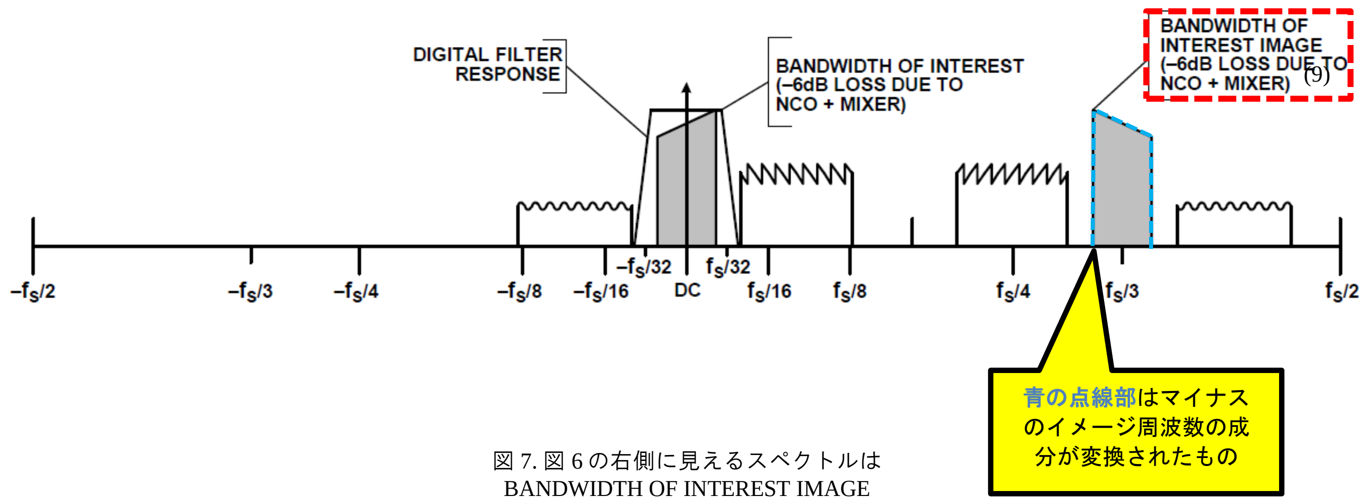

図 7. 図 6 の右側に見えるスペクトルは
BANDWIDTH OF INTEREST IMAGE
つまり希望波のイメージがこんなところに出ている

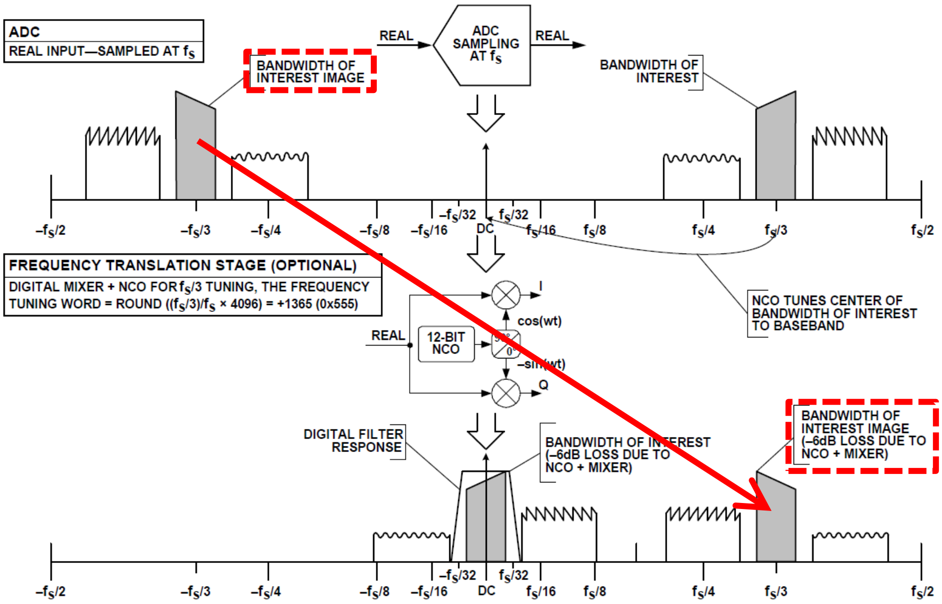

図 8. Fig. 51 で BANDWIDTH OF INTEREST IMAGE が変な周波数に変換されている！
（図 2 を修正して再掲）

しかし図 6 ではマイナスの周波数成分が変なところに出ているぞ

そうです。そのとある日の、とある代理店での、とある FAE の方からの質問は続くのでありました…。

「わかりました。でも図 6 の右側にあるスペクトルは希望波ものじゃないですよね」

「図 7 のように、ここは BANDWITH OF INTEREST IMAGE とありますから、希望波のイメージ、つまり図 8（図 2 を修正して再掲）の$-f_S/3$のところにある希望波のイメージがここに変換されているということではないですか？」

「これはどう考えればよいのでしょうか？」

なかなか痺（シビ）れる質問です。30 秒ほど絶句してしまったかと思います。答えに窮したときの 30 秒って長いですね（笑）。それこそこのシーンでメーカの FAE としては、複数回の「なぜなぜ」を繰り返**された**過程の結果として「すいません降参です」なんてことは言えません（笑）。

この複素ミキシング信号処理は離散時間領域であるデジタル信号でおこなわれている

この技術ノートの中編 TNJ-033 で、イメージ除去ミキサの説明をしました。そこでの信号処理は連続時間領域であるアナログ信号でありました。

しかしここでの複素ミキシング信号処理は、離散時間領域であるデジタル信号で行われています。離散時間…、つまりここで出てくるのが「サンプリング定理」なわけです。それに気がつけば、この質問に回答できることになるわけです。

ここでのポイントは「サンプリング周波数ごとに繰り返されるイメージ・スペクトルが現れる」という点です。

正弦波の希望波Rのうち、イメージ周波数成分に相当するマイナスの周波数成分は

$$R_- = \exp(-j\omega_{RF}t) \qquad (12)$$

です。これがローカル信号

$$L = \exp(-j\omega_{LO}t) \qquad \text{(式 10 再掲)}$$

と複素ミキシングされた結果として

$$IM = \exp[j(-\omega_{RF} - \omega_{LO})t] \qquad (13)$$

が生成されます。

ここまでの周波数関係の説明を用いて、周波数軸でこのイメージ周波数の信号が、複素ミキシングにより周波数変換されるようすを図 9 に示します。

もともとイメージ周波数は$-f_S/3$ [Hz]です。ローカル周波数も$f_S/3$ですから、複素ミキシングされた結果は式(13)のとおり$-2f_S/3$に現れます。

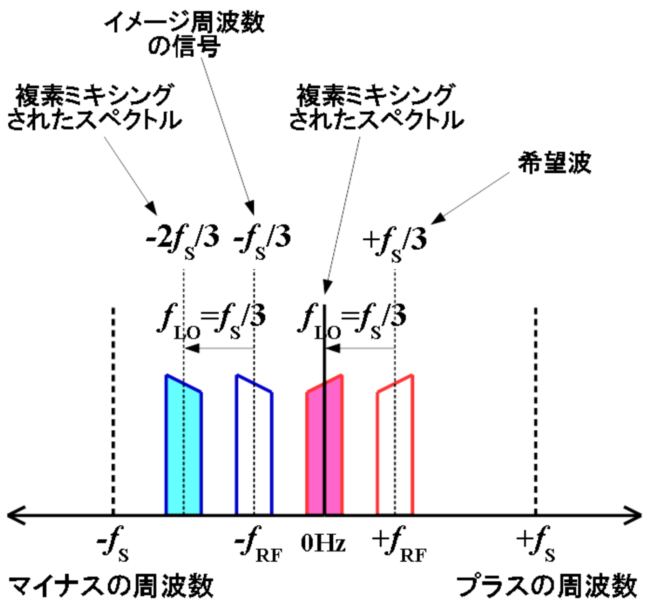

図 9. イメージ周波数の信号が複素ミキシングにより
周波数変換されるようす

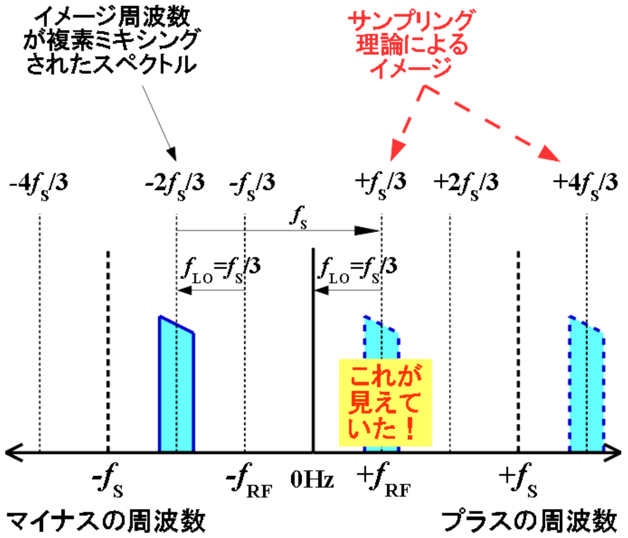

図 10. イメージ周波数の信号が周波数変換され
それが$+f_S/3$に現れる

この周波数は、サンプリング周波数のマイナス側である$-f_S$ [Hz]からすれば、それとの差分は「プラス$f_S/3$」ですね。これが図 10 のように、そして図 7 や図 8 のようにゼロ周波数に対して「プラス$f_S/3$」の周波数に現れることになるわけですね。

より新しい ADC はより高性能な NCO になっている

ここまでの DDC の動作、それが複素ミキシングであること、また離散信号であることを改めて検討し、まとめてみると「なるほどねえ」と思わせるものだったわけです。

ところでこの技術ノートを執筆していくなか、日常業務で、別のとある代理店の、とある FAE の方とお話しする機会がありました。そのときの質問は 4 チャンネル（Quad）の 500Msps の ADC である AD9694 の DDC に関することでした。

ここでその話題の細かいことをお話しするつもりはありませんが、図 11 にその AD9694 のデータシートの DDC（NCO + MIXER）部分を引用してみました。

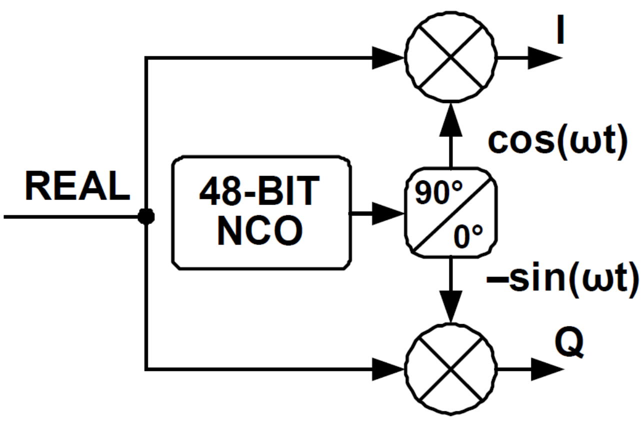

図 11. AD9694 の複素ミキサ（DDC）。サンプリングレートが 500Msps で高速だが、2016 年に発売された最新の製品であるため NCO は 48bit ワード幅になっている

なんと NCO のワード幅が 48 ビットになっています。AD9680 が 12 ビット NCO ですから、単純に計算しても、分解能が 2 の 36 乗ぶんの 1（って、とてつもなく細かい…）まで高分解能になっているのでした。

半導体はプロセス技術も発展して高速化してきてはいますが、それでも 48 ビットの NCO を数 100MHz オーダで廻すなんて、相当なものですね。

あらためて数学を学ぼうとすれば死ねなくなる（笑）

ということで技術ノート 3 部作、TNJ-032, 033, 034 を執筆するなかで、あらためて今回、図 12 の本（TNJ-033 で紹介したものの再掲。参考文献[2]）を読み返していきました。そのとき「じっくりとこの本を全て読んでみたい」と感じたのでした。

づづけて「これから先、80 歳すぎても、こんな本を楽しいと読んでいたら『まだまだ探求したくて・忙しすぎてオレはまだ死ねない』なんて、その 80～90 歳代（！？）に思うのかな？」と、ひとり笑ってしまいました。

けっきょく「学び」は永遠に続くのかもしれません。たとえば YouTube で無償公開されている「MIT OpenCourseWare」なんて、それこそ学びとしては「垂涎」のコンテンツですね！（参考文献[3, 4]）

参考文献

[1] 都築卓司; なっとくする虚数・複素数の物理数学, 講談社

[2] 数学セミナー編集部編; 数学 100 の定理 ピタゴラスの定理から現代数学まで, 日本評論社

[3] https://ocw.mit.edu/index.htm

[4] https://www.youtube.com/user/MIT

図 12.　数学 100 の定理, 日本評論社（TNJ-033 の図 2 再掲）