

**「 $e^{j\omega t}$ とは」を考えるなかで出会うイメージ除去ミキサや超高速 ADC**
**(中編：イメージ除去ミキサなるもの考える)**

著者：石井 聡

**はじめに**

この技術ノートは、「 $e^{j\omega t}$ 」に関する話題の中編としてお届けするものです。前編 TNJ-032 では、複素信号がナニモノかを考え、オイラーの公式をあらためて考えていきながら、回路理論での計算において、現実世界の正弦波と、複素信号とを、どのようなかたちで考えていくことができるか示していききました。

そのなかで複数回の「なぜなぜ」を繰り返していく過程の結果として、「すいません降参です」なんというお話をさせていただきました…。またその話から、「それでは本質論として（現実世界の観測ではなく）、正弦波信号  $\cos(\omega_0 t)$  か、複素信号  $\exp(j\omega_0 t)$ 、どちらが存在しているか？」についても考えていきました。

今回と次回の技術ノート、TNJ-033「中編」と TNJ-034「後編」では、前編での考察をもとに、上記で「すいません降参です」とした複素信号について、現実の回路で複素信号がどのように用いられ、表されているかを考えてみたいと思います。まずこの中編では、イメージ除去ミキシングという方法について、そして次の後編では、高速 ADC のデータシートの中で見つけたスペクトル表現とその考え方をそれぞれご紹介していきたいと思えます。

**あらためて数学を学びたい**

APA ホテルに宿泊すると、APA ホテル女性社長と APA グループ創業者（旦那さん）のこれまでの企業経営奮闘記のコミック本（図 1。参考文献 [1]）を部屋で見ることができます。かの有名な APA ホテルの女性社長さんは、社会人となったあとに大学・大学院に再入学して勉強したそうです。その授業中の描写ページには「学生の頃につまらないと思っていた勉強って、こんなに面白かったんだ」という趣旨のことばがありました。

これはまさしく同感だと思ったしだいです。実社会に出ると解決しなくてはならない、いろいろな問題（技術／業務／手続き／人事／組織／経営／人間関係／経済／家庭などなど）に多数ぶち当たります。一般的にはこれらを、過去の経験と自分の知恵、そして生兵法や試行錯誤、はたまた体当たりで解決していくといったところでしょうか。

**実社会に出てこそ気がつく理論体系の重要性**

しかしそのうちの多くは（全てとはいえませんが）、先人が経験し、そして体系づけられてきた理論で解決できる／応用できる／ヒントとして関連づけられるものです。実社会に出て、一旦体当たりで解決した経験をもって、あらためてその理論体系を学習すると、それこそ「現実と学問の間が、楽しさと興味とで繋がっていく」という、「勉強って、こんなに面白かったんだ」というように感じるようになります。そしてそれは「定着する知識／知恵」になるのではないかと思います。

この技術ノート三部作を書くなかで、以前購入して本棚に積んであった、図 2 の本（参考文献[2]）をあらためて読み返してみました。「ああ、履きなれない青い草鞋を履いていたころに知った定理（たとえばエルゴード定理、シュワルツの不等式、中心極限定理など）がいっぱいあるな」と思いました。

技術者駆け出しのころから、何度も回路設計で問題にぶちあたって、それこそ「生兵法」で解決してきて、「なぜこうなるのだろうか？」と（業務多忙ななかで）ぼんやり思っていた疑問が、慣れない青い草鞋を履いていたころ、これらの数学の理論体系のなかに収斂（しゅうれん）していったわけですね。APA ホテルの社長の社会人入学のくだりは、自らの琴線に触れるストーリーだったのです。

18 歳からの大学のころは授業をサボったり、寝過ごししたり、授業中に雑談したり違うことを考えていたものが、青い草鞋のころは、それこそ「勉強って、こんなに面白かったんだ」と、実社会（実回路設計）を経験した後だからこそ思ったものなのでした（それはそれで相当な苦しみだったわけですが…）。



図 1. APA ホテルの客室内に置かれている企業経営奮闘記「APAホテル—利益を生み出す逆張りの成功哲学」（APA ホテル宿泊時に撮影）

アナログ・デバイス株式会社は、提供する情報が正確で信頼できるものであることを期していますが、その情報の利用に関して、あるいは利用によって生じる第三者の特許やその他の権利の侵害に関して一切の責任を負いません。また、アナログ・デバイス社の特許または特許の権利の使用を明示的または暗示的に許諾するものでもありません。仕様は、予告なく変更される場合があります。本紙記載の商標および登録商標は、それぞれの所有者の財産です。  
©2017 Analog Devices, Inc. All rights reserved.

Rev.0



図 2. 数学 100 の定理, 日本評論社

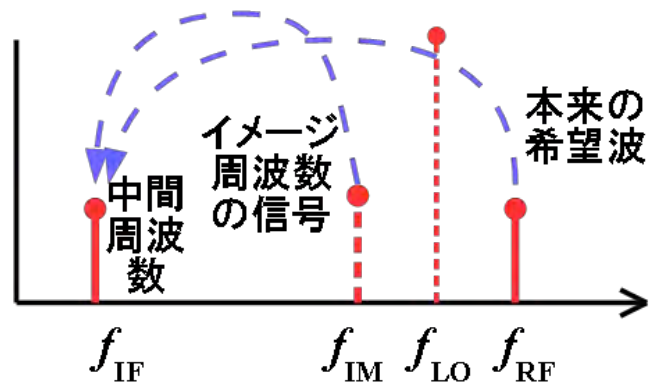


図 3. 希望波以外にもイメージ（映像）周波数の信号も周波数変換される

### イメージ除去ミキサとは

この問題は複素ミキシングという方法を用いることにより解決できます。複素ミキシングというより「イメージ除去ミキサ (Image Rejection Mixer)」というほうが一般的です。後編で高速 ADC の複素ミキシングについて示しますので、一応ここでもその用語を使用してみました。

アナログ・デバイセズでも Image Rejection Mixer は各種製品があり、ひとつに HMC520A があります。

HMC520A: 6 GHz to 10 GHz, GaAs, MMIC, I/Q Mixer

<http://www.analog.com/jp/HMC520A>

#### 【概要】

The HMC520A is a compact gallium arsenide (GaAs), monolithic microwave integrated circuit (MMIC), in-phase quadrature (I/Q) mixer in a 24-terminal, RoHS compliant, ceramic leadless chip carrier (LCC) package. The device can be used as either an image reject mixer or a single sideband upconverter. The mixer uses two standard double balanced mixer cells and a 90° hybrid fabricated in a GaAs, metal semiconductor field effect transistor (MESFET) process. The HMC520A is a much smaller alternative to a hybrid style image reject mixer and a single sideband upconverter assembly. The HMC520A eliminates the need for wire bonding, allowing the use of surface-mount manufacturing techniques.

#### 【抄訳】

HMC520A は小型な IQ ミキサ GaAs MMIC です。24 端子、RoHS 準拠の LCC パッケージ品です。この IC はイメージ除去ミキサにもシングル・サイドバンドのアップ・コンバータのどちらにも活用できます。このミキサでは GaAs プロセスでの MESFET 半導体の上にダブルバランスド・ミキサと 90° ハイブリッド回路が形成されています。HMC520A は一般的なハイブリッド型イメージ除去ミキサやシングル・サイドバンドのアップ・コンバータと比較して小型化を実現できます。また表面実装技術によりワイヤボンディングの加工が不要となっています。

イメージ除去ミキサは、それこそ前編の式(11)の応用として

$$\begin{aligned} s_{RF}(t) \cdot s_{LO}(t) &= AB \exp(j2\pi f_{RF}t) \cdot \exp(-j2\pi f_{LO}t) \\ &= AB \exp(j2\pi f_{RF}t - j2\pi f_{LO}t) \\ &= AB \exp[j2\pi(f_{RF} - f_{LO})t] \end{aligned} \quad (3)$$

と、得られる周波数が片一方 ( $f_{RF} - f_{LO}$  のみ)、つまり希望波のみを周波数変換できるものです。これを実回路でどのように実現するのでしょうか。

## 周波数ミキサによる周波数変換は希望波だけを捉えられない

前編の「周波数ミキサによる周波数変換では」という節で、ふたつの周波数を乗算すると「 $f_1, f_2$  の引き算の周波数と足し算の周波数に、大きさ 1/2、つまり元々の信号から -6dB となったスペクトルが現れる」とお話ししました。

無線通信の世界では、受信したい高い周波数の無線通信信号（これを「希望波」とか Radio Frequency = RF 信号と呼びます）を「取り扱い易い」低い周波数に周波数変換して、復調などの情報信号処理をすることが一般的です。まあ、といっても、最近のアナログ・デバイセズの製品などでは RF 信号を直接、情報信号に変換する方式がさかんに用いられています。

さて、希望波を低い周波数に変換する際に、前編で取り上げたような周波数ミキサが用いられます。周波数ミキサにより、

$$f_{IF} = f_{RF} - f_{LO} \quad (1)$$

として周波数変換をすることができます。ここで  $f_{RF}$  は希望波／高周波の無線通信信号、 $f_{IF}$  は変換された「取り扱い易い」低い周波数の信号（中間周波数、Intermediate Frequency = IF と呼ばれます）、 $f_{LO}$  は周波数変換に利用するための内部信号（局部／ローカル発振器、Local Oscillator = LO と呼ばれます）です。

### 希望波以外のイメージ周波数の信号も変換してしまう

しかし周波数ミキサを用いると、図 3 のように本来の希望波である  $f_{RF}$  以外に、「イメージ（映像）周波数の信号  $f_{IM}$ 」も  $f_{IF}$  として得られてしまいます。簡単な式ですが、

$$f_{IF} = f_{LO} - f_{IM} \quad (2)$$

前編、また上記に「 $f_1, f_2$  の引き算の周波数と足し算の周波数に、大きさ 1/2、つまり元々の信号から -6dB となったスペクトルが現れる」とご説明したように、この式(2)は「曇りなく／曖昧さなく」正しいのですが、「捉えたい希望波」以外の周波数も情報信号処理をする低い周波数に周波数変換されてしまえば、復調などの情報信号処理で適切な性能が期待できません。

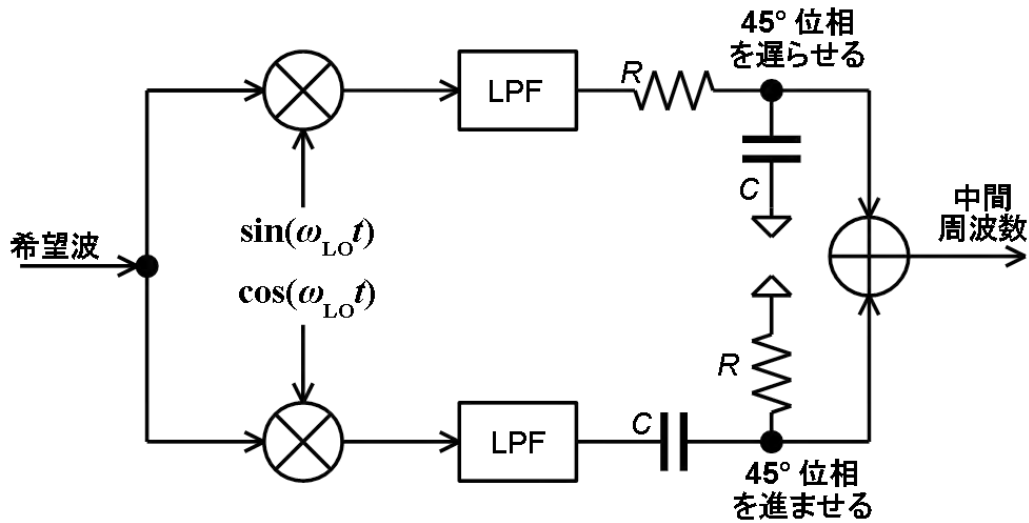


図 4. ハートレー (Hartley) 構造

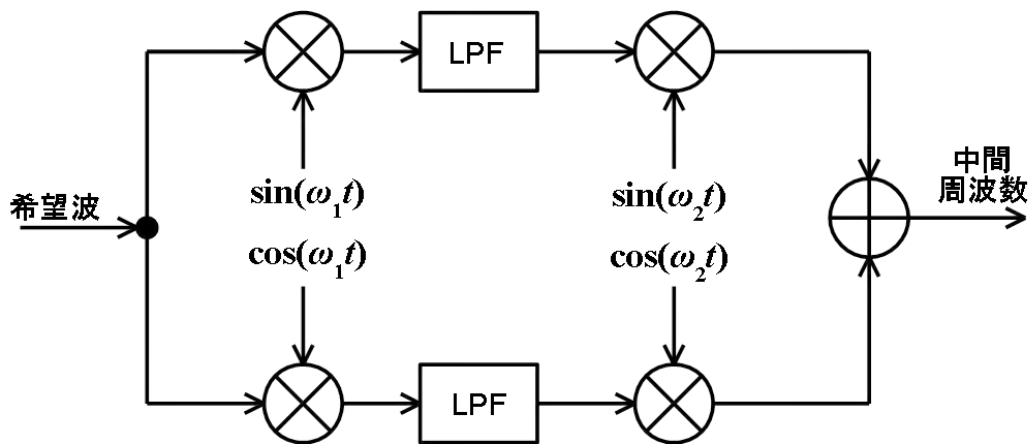


図 5. ウェーバー (Weaver) 構造

これには基本的にふたつの方法、図 4 のハートレー (Hartley) 構造と、図 5 のウェーバー (Weaver) 構造というものがああります。それぞれ発明者の名前が冠されています。

### ハートレー (Hartley) 構造を式で追ってみる

それではハートレー (Hartley) 構造について、ごちゃごちゃと式で追ってみたいと思います。前編からご説明しているように、現実世界で信号は、 $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  で表されるわけですが、ここでは折角なので「ごちゃごちゃ」と極座標表現でやってみます。

まずハートレー回路に加わる希望波ですが

$$\cos(\omega_{RF}t) = \frac{1}{2} [\exp(j\omega_{RF}t) + \exp(-j\omega_{RF}t)] \quad (4)$$

とします。この式では  $f_{RF}$  ではなく、 $\omega_{RF} = 2\pi f_{RF}$  で表記しています。以降も角周波数  $\omega$  を用いていきます。

#### ハートレー構造を式で追ってみる (① 下側の経路)

図 4 の下側のミキサ経路に加わる局部 (ローカル) 発振信号は、式(4)と同じように ( $\omega_{RF}$  を  $\omega_{LO}$  に変えただけ)

$$\cos(\omega_{LO}t) = \frac{1}{2} [\exp(j\omega_{LO}t) + \exp(-j\omega_{LO}t)] \quad (5)$$

です。希望波の式(4)と式(5)が乗算されると

$$\begin{aligned} & \cos(\omega_{RF}t) \cdot \cos(\omega_{LO}t) \\ &= \frac{1}{4} (\exp[j(\omega_{RF} + \omega_{LO})t] + \exp[j(-\omega_{RF} + \omega_{LO})t]) \\ & \quad + \frac{1}{4} (\exp[j(\omega_{RF} - \omega_{LO})t] + \exp[j(-\omega_{RF} - \omega_{LO})t]) \quad (6) \end{aligned}$$

となりますが、式だけだと「わけわかんないよ」となりかねませんので、周波数軸上で図示してみると図 6 のようになります。なお  $\omega_{RF} > \omega_{LO}$  と仮定して表記してあります。

次段のローパス・フィルタ (LPF) で高い周波数成分 (式の斜線の部分) が除去されると (第 3 項がプラスの周波数成分なので **第 2 項と第 3 項を入れ替えて**)、

$$= \frac{1}{4} (\exp[j(\omega_{RF} - \omega_{LO})t] + \exp[j(-\omega_{RF} + \omega_{LO})t]) \quad (7)$$

が得られます (図 6 にも示してあります)。式(7)の第 2 項のべき指数部をマイナスでくくれば

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} (\exp[j(\omega_{RF} - \omega_{LO})t] + \exp[-j(\omega_{RF} - \omega_{LO})t]) \\ &= \frac{1}{2} \cos[(\omega_{RF} - \omega_{LO})t] \quad (8) \end{aligned}$$

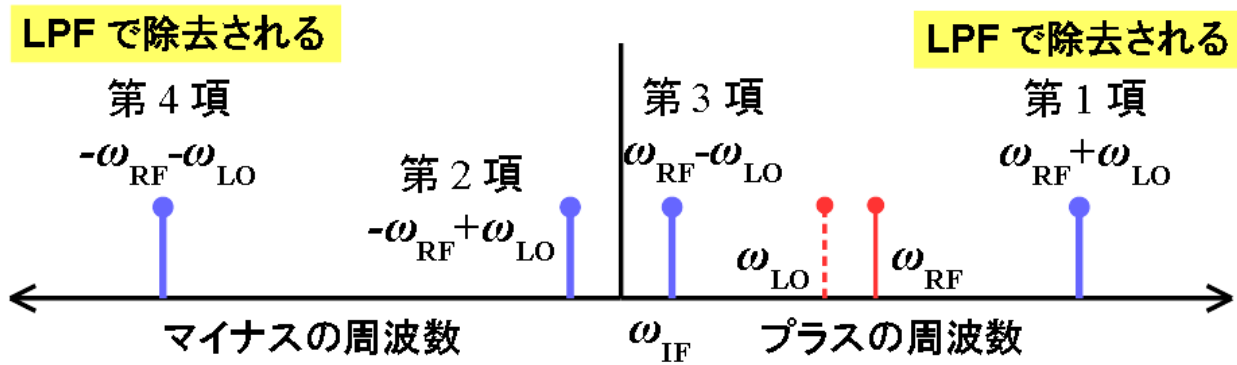


図 6. ハートレー構造の下側の経路、式(6)の周波数関係 ( $\omega_{RF} > \omega_{LO}$ と仮定している)

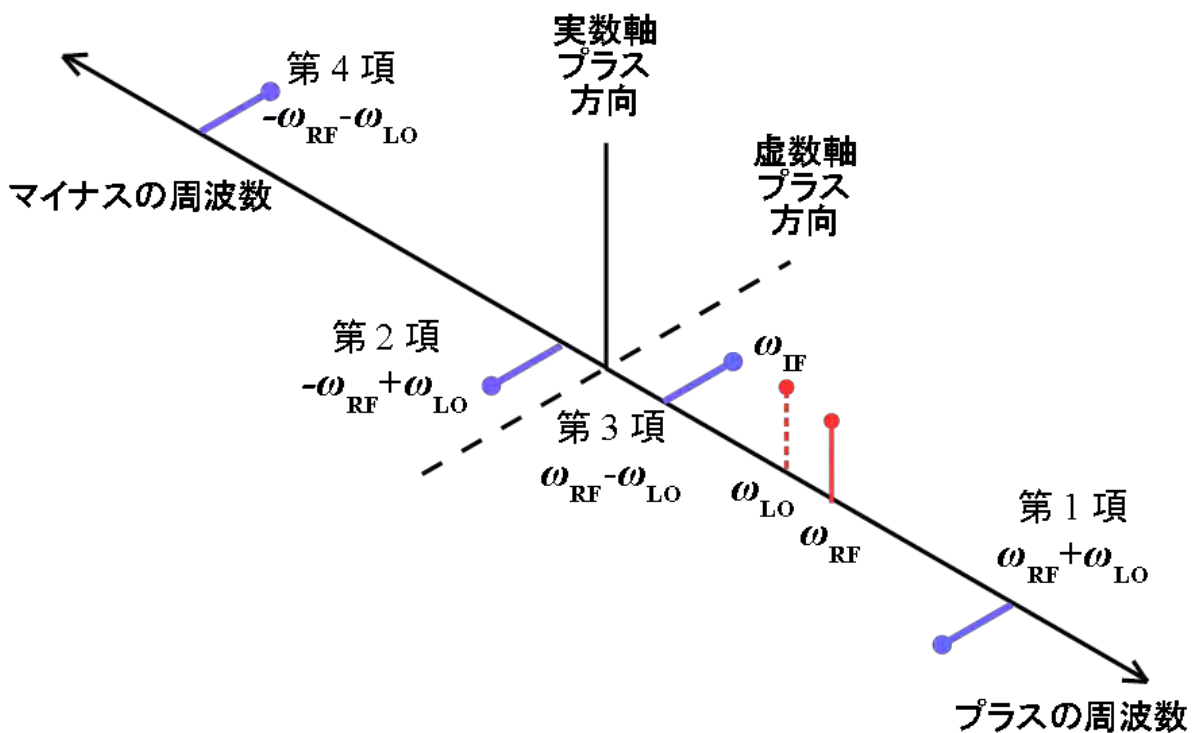


図 7. ハートレー構造の上側の経路、式(10)の周波数関係 ( $\omega_{RF} > \omega_{LO}$ と仮定している)

ハートレー構造を式で追ってみる (② 上側の経路)

つづいて図 4 の上側のミキサ経路に加わる局部 (ローカル) 発振信号は、式(5)と同じように

$$\sin(\omega_{LO}t) = \frac{1}{j2} [\exp(j\omega_{LO}t) - \exp(-j\omega_{LO}t)] \quad (9)$$

です。希望波の式(4)と式(9)が乗算されると

$$\begin{aligned} &\cos(\omega_{RF}t) \cdot \sin(\omega_{LO}t) \\ &= \frac{1}{j4} (\exp[j(\omega_{RF} + \omega_{LO})t] + \exp[j(-\omega_{RF} + \omega_{LO})t]) \\ &\quad - \frac{1}{j4} (\exp[j(\omega_{RF} - \omega_{LO})t] + \exp[j(-\omega_{RF} - \omega_{LO})t]) \end{aligned} \quad (10)$$

ここでも次段のローパス・フィルタ (LPF) で高い周波数成分 (斜線の部分) が除去されると (第 3 項がプラスの周波数成分なので第 2 項と第 3 項を入れ替えて)、

$$\frac{1}{j4} (-\exp[j(\omega_{RF} - \omega_{LO})t] + \exp[j(-\omega_{RF} + \omega_{LO})t]) \quad (11)$$

が得られます。ここでも式だけだと「わけわかんないよ」となりかねませんので、周波数軸上で図示してみると図 7 のようになります。ここで特に注意していただきたいことが「極性」と「位相」です (結局、「極性」も「位相」なのですが)。そのため図 7 では 3 次元的に表記してあります。上方向が実数軸で、右に (後ろに) 回転すると位相がプラスになるとしてあります。式(10)の第 1 項は  $1/j$  なので「マイナス  $90^\circ$  の位相」となります。つづいて式(11) 全体をマイナスでくくり、第 2 項のべき指数部もマイナスでくくると

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{j4} (\exp[j(\omega_{RF} - \omega_{LO})t] - \exp[-j(\omega_{RF} - \omega_{LO})t]) \\ &= -\frac{1}{2} \sin[(\omega_{RF} - \omega_{LO})t] \end{aligned} \quad (12)$$

## アナログ電子回路技術ノート

TNJ-033

## ハートレー構造を式で追ってみる (③ 足し算合成の部分)

さらに図4の右側のように、この2信号、つまり式(8)と式(12)とが合成されます。

図4では、上側のシステムの位相を45°遅らせ、下側のシステムの位相を45°進ませ、都合、相互の関係を90°ずらして合成させています。

ちなみにこの「45°遅らせ/45°進ませ」というのは、図4において抵抗とコンデンサで出来るローパス・フィルタやハイパス・フィルタで伝達特性が-3dB変化する周波数、つまり抵抗値とコンデンサのリアクタンスの絶対値が等しくなる周波数において、位相が45°変化することを用いています。つまりこの回路では、「ある特定の周波数」でしか「45°遅らせ/45°進ませ」というのを実現できないこととなります。

この90°の位相シフトを広帯域で実現しようとするなら、アナログ回路であれば「RCポリフェーズ・フィルタ」、デジタル回路であれば「ヒルベルト変換(ヒルベルト・フィルタ)」というもので構成することが一般的です。

さて、図4の下側の信号を基準位相として考えれば、上側の信号の位相が90°遅れたかたちで足し算されます。

図4の上側の信号、つまり式(12)の位相をマイナス90°シフトしたものは

$$-\frac{1}{2}\sin\{(\omega_{RF}-\omega_{LO})t-\pi/2\} \quad (13)$$

となりますが、これは式(11)においては、

(以下は式が長いので一段組みで表示してあります)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\sin\left\{(\omega_{RF}-\omega_{LO})t-\frac{\pi}{2}\right\} &= -\frac{1}{j4}\left(\exp\left[j\left\{(\omega_{RF}-\omega_{LO})t-\frac{\pi}{2}\right\}\right]-\exp\left[-j\left\{(\omega_{RF}-\omega_{LO})t-\frac{\pi}{2}\right\}\right]\right) \\ &= -\frac{1}{j4}\left[\exp\{j(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\}\cdot\exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right)-\exp\{-j(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\}\cdot\exp\left(+j\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{j4}\left[\exp\{j(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\}\cdot(-j)-\exp\{-j(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\}\cdot(+j)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\exp\{j(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\}+\exp\{-j(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\}\right]=\frac{1}{2}\cos\{(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\} \end{aligned} \quad (14)$$

ちなみに

$$\exp\left(+j\frac{\pi}{2}\right)=+j,\exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right)=-j$$

です。式(13)から式(14)の変換には単純な三角関数の公式

$$\sin(\theta-\pi/2)=-\cos(\theta) \quad (15)$$

を使ってもいいのですが、少しこだわって複素数をもちいて計算してみました(笑)。

## 90°遅らせるのは複素表現に-jすればいい??

90°遅らせるというのは「式(14)の2段目、3段目の各項を『-j』倍すればいいだろう」と思うかもしれません。しかしプラスの周波数の位相とマイナスの周波数の位相は「奇関数(ゼロを中心として極性が逆で対称)」の関係ですので、式(14)のそれぞれの第2項、つまりマイナスの周波数のぶんは『+j』倍することになります。

めでたく $\omega_{RF}-\omega_{LO}$ の信号が得られる

こうなると式(14)は式(8)と全く同じだということが分かります。これら式(8)と式(14)は、図4の右のように足し算されるわけですが、これが中間周波数信号、つまりIF信号

$$\begin{aligned} s_{IF}(t) &= \frac{1}{2}\left(\exp\{j(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\}+\exp\{-j(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\}\right) \\ &= \cos\{(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\} \end{aligned} \quad (16)$$

として得られることとなります。

## ハートレー(Hartley)構造をSPICEシミュレーションで追ってみる

ここまで式で数学的にハートレー構造での周波数変換動作を考えてきましたが、SPICEシミュレーションを用いてグラフィカルにこの周波数変換動作を見てみましょう。使用したSPICEツールはアナログ・デバイゼスのADIsimPEです。

図8は図4のハートレー構造をシミュレーション回路で置き換えてみたものです。入力には希望波信号として6kHzを加えています。また局部(ローカル)発振は5kHzで、サインとコサインが上下の経路それぞれの乗算器に加わっています。

乗算器出力は、ADIsimPEの内蔵モデル「ラプラス伝達関数; Laplace Transfer Function」という数学モデルに接続されています。このモデルを使ってローパス・フィルタを構成しています。最初はこのモデルでラプラス演算子を用いてフィルタ係数を作ってみようと思いましたが、ヘルプを見るとなんとベッセル、バターワース、チェビシェフの各フィルタ形状を関数として入れれば、簡単に目的のフィルタが実現できる機能があることに気がつき、さっそくそれ(位相変化・群遅延の少ないベッセル・フィルタ)を利用してみました!

上記のラプラス伝達関数モデルの出力は45°位相を遅らせる/進ませるCR位相シフト回路に接続され、その位相シフト回路の出力が加算されるという構成になっています。

確かに $\omega_{RF}-\omega_{LO}$ の信号が得られている

シミュレーション結果を図9に示します。一番下の「中間周波数1kHz出力」のように、入力された希望波6kHzが周波数変換され、1kHzとして出力に現れていることが分かります。

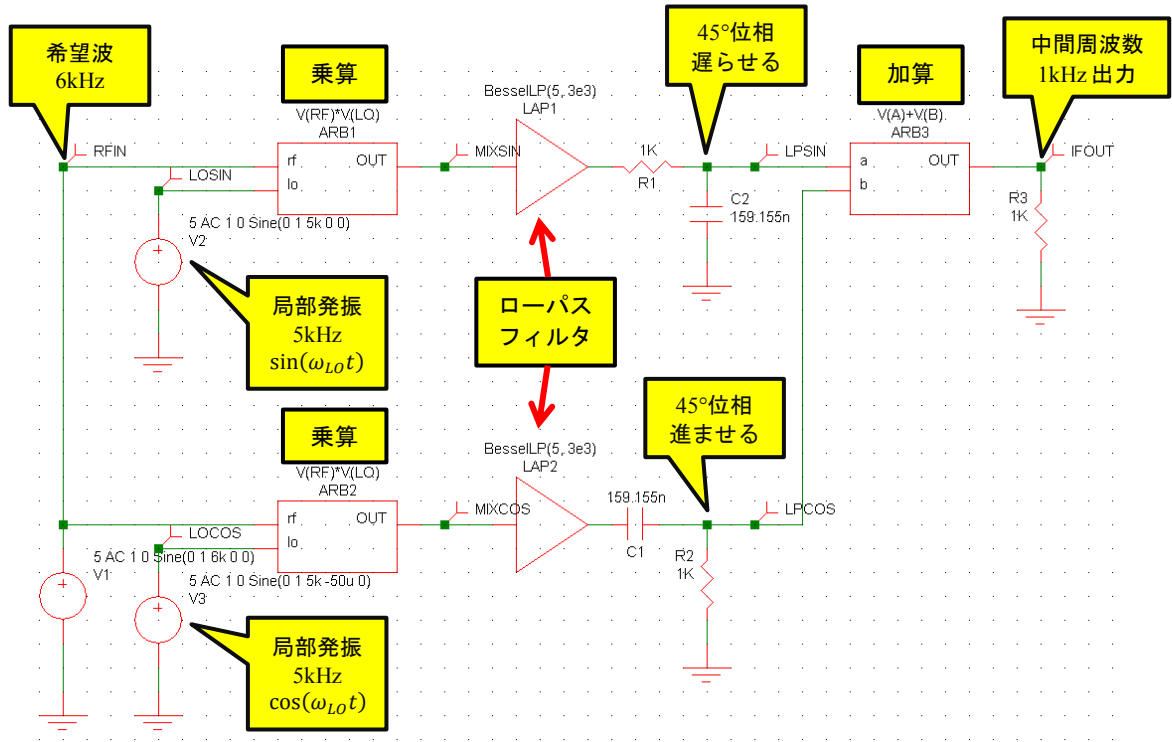


図 8. ハートレー構造を SPICE 上で実現してみた ( $f_{RF} = 6\text{kHz}$ ,  $f_{LO} = 5\text{kHz}$ )

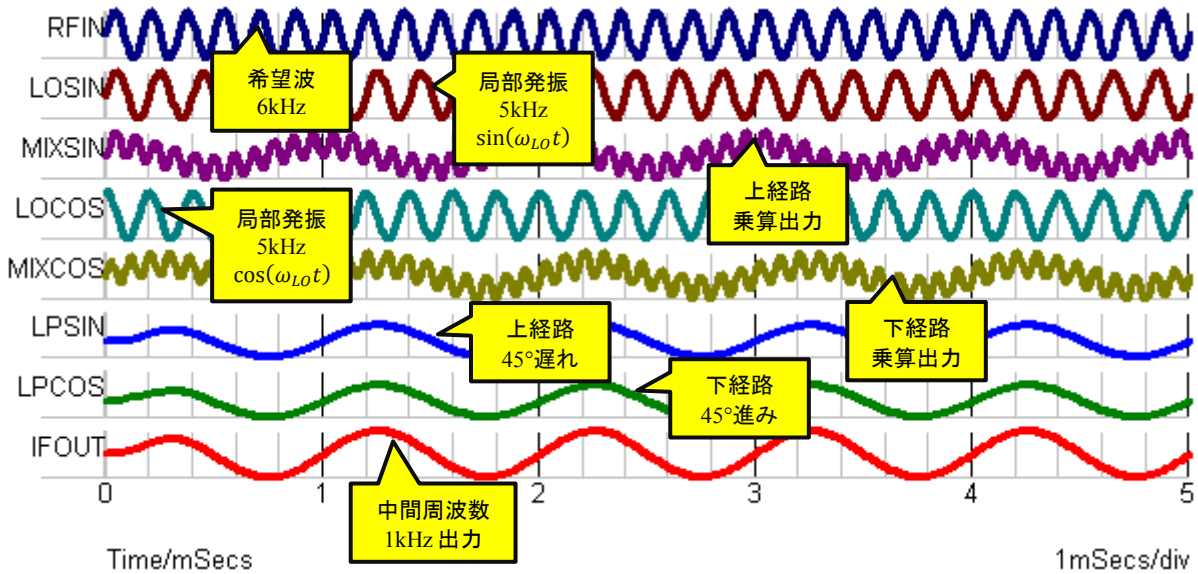


図 9. ハートレー構造で希望周波数の変換結果が出力で得られるようす ( $f_{RF} = 6\text{kHz}$ ,  $f_{LO} = 5\text{kHz}$ )

### イメージ周波数が除去されるようすを式で追ってみる

つづいてハートレー回路に加わるイメージ周波数 $\omega_{IM}$ の信号を

$$\cos(\omega_{IM}t) = \frac{1}{2} [\exp(j\omega_{IM}t) + \exp(-j\omega_{IM}t)] \quad (17)$$

とします。

#### イメージ除去を式で追ってみる (① 下側の経路)

式(17)のイメージ周波数の信号が、図 4 の下側のミキサ経路に加わる局部 (ローカル) 発振信号の式(5)と乗算されると

$$\begin{aligned} & \cos(\omega_{IM}t) \cdot \cos(\omega_{LO}t) \\ &= \frac{1}{4} (\exp[j(\omega_{IM} + \omega_{LO})t] + \exp[j(-\omega_{IM} + \omega_{LO})t]) \\ & \quad + \frac{1}{4} (\exp[j(\omega_{IM} - \omega_{LO})t] + \exp[j(-\omega_{IM} - \omega_{LO})t]) \quad (18) \end{aligned}$$

となります。ここで $\omega_{IM} < \omega_{LO}$ と仮定しています。この式(18)の周波数関係は周波数軸上で図 6 と ( $\omega_{IM}$ ,  $\omega_{LO}$ の位置が逆な以外は) 同じになります。

次段のローパス・フィルタ (LPF) で高い周波数成分 (式の斜線の部分) が除去されます。つづいて「プラスの周波数成分 (式(18)の第 2 項)」、「マイナスの周波数成分 (同じく第 3

項)」を式(18)そのまゝの順序で並べてみると ( $\omega_{IM} < \omega_{LO}$ なので、べき級数部のカッコの中は入れ替えて)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \langle \exp[j(\omega_{LO} - \omega_{IM})t] + \exp[-j(\omega_{LO} - \omega_{IM})t] \rangle \\ &= \frac{1}{2} \cos[(\omega_{LO} - \omega_{IM})t] \end{aligned} \quad (19)$$

この式は、 $\omega_{RF}$ が周波数変換される場合の式(8)と ( $\omega_{LO}, \omega_{IM}$ の順序は逆ですが) 同じになります。理由はコサインなので

$$\begin{aligned} &(\omega_{RF} - \omega_{LO}) \\ &-(\omega_{LO} - \omega_{RF}) \\ &(\omega_{LO} - \omega_{RF}) \end{aligned}$$

でも

$$\begin{aligned} &(\omega_{LO} - \omega_{IM}) \\ &-(\omega_{IM} - \omega_{LO}) \\ &(\omega_{IM} - \omega_{LO}) \end{aligned}$$

であってもコサインの符号は同じ (変わらない) だからです。

**イメージ除去を式で追ってみる (② 上側の経路)**

つづいて、式(17)のイメージ周波数 $\omega_{IM}$ の信号が、図4の上側のミキサ経路に加わる局部 (ローカル) 発振信号の式(9)と乗算されると

$$\begin{aligned} &\cos(\omega_{IM}t) \cdot \sin(\omega_{LO}t) \\ &= \frac{1}{j4} \langle \exp[j(\omega_{IM} + \omega_{LO})t] + \exp[j(-\omega_{IM} + \omega_{LO})t] \rangle \\ &\quad - \frac{1}{j4} \langle \exp[j(\omega_{IM} - \omega_{LO})t] + \exp[j(-\omega_{IM} - \omega_{LO})t] \rangle \end{aligned} \quad (20)$$

この式(20)の周波数関係を周波数軸上で図示してみると、図10のようになります。式(10)、式(11)では「第2項は**マイナス**の周波数成分で第3項が**プラス**の周波数成分」でした (そのため**第2**

項と**第3項**を入れ替えていた)。しかし式(20)では「**第2項はプラス**の周波数成分で**第3項がマイナス**の周波数成分」となります。これがイメージ除去のポイントです。

次段のローパス・フィルタ (LPF) で高い周波数成分 (式の斜線の部分) が除去されると

$$\frac{1}{j4} \langle \exp[j(-\omega_{IM} + \omega_{LO})t] - \exp[j(\omega_{IM} - \omega_{LO})t] \rangle \quad (21)$$

$\omega_{IM} < \omega_{LO}$ なので、**項の順序はこのままで**、べき級数部のカッコ内の $\omega_{IM}$ と $\omega_{LO}$ の順序「だけ」を入れ替えると

$$\begin{aligned} &\frac{1}{j4} \langle \exp[j(\omega_{LO} - \omega_{IM})t] - \exp[-j(\omega_{LO} - \omega_{IM})t] \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sin[(\omega_{LO} - \omega_{IM})t] \end{aligned} \quad (22)$$

式(12)ではマイナス符号が付いていましたが、ここではそれがありません…。また式(10)、式(11)では第2項と第3項が**入れ替えられ**、その結果、式(12)がマイナスになっていたのですが、この式(22)では式全体がプラスになっているわけですね…。

**イメージ除去を式で追ってみる (③ 足し算合成の部分)**

希望波と同じように、図4の下側を基準位相として考えれば、上側の位相が $90^\circ$ 遅れたかたちで足し算されます。

図4の上側の経路、つまり式(22)の位相をマイナス $90^\circ$ シフトしたものは、式(15)を使ってショートカットしてしまえば

$$\frac{1}{2} \sin\{(\omega_{LO} - \omega_{IM})t - \pi/2\} = -\frac{1}{2} \cos[(\omega_{LO} - \omega_{IM})t] \quad (23)$$

**なんと!** 下側の経路の式(19)と、上側の経路の式(23)は「**符号が反対**」だけで**全く同じ**だということが分かります。つまり相互にキャンセルされて、このイメージ周波数の信号は**出力に現れない**わけですね!

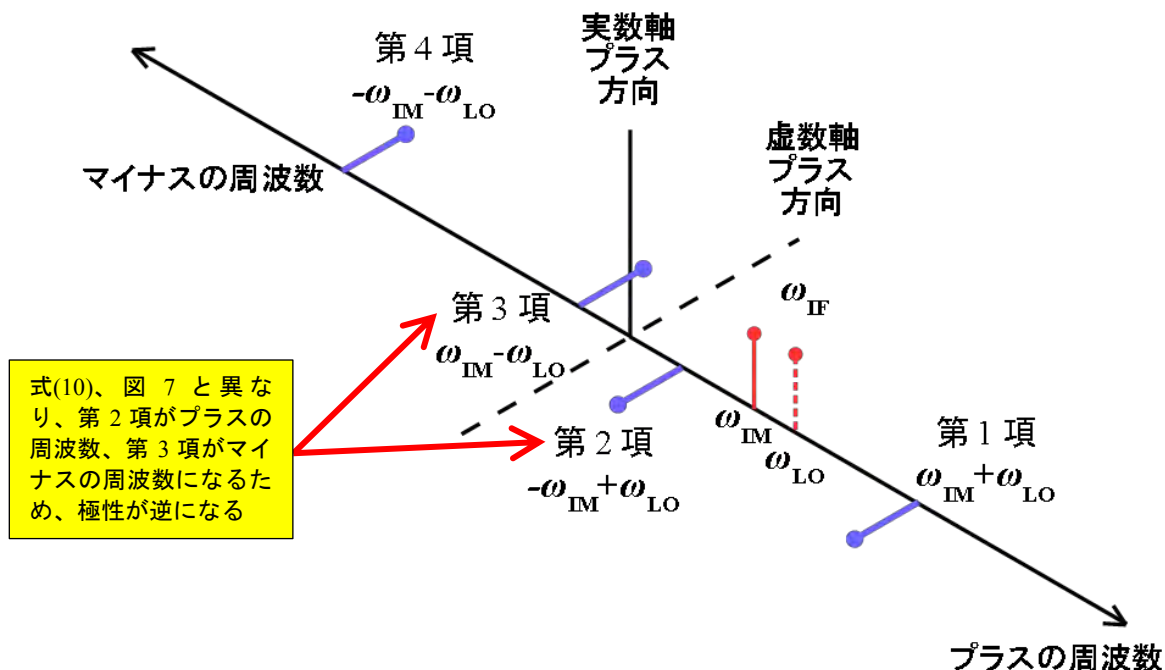


図10. イメージ除去時のハートレー構造の上側の経路、式(20)の周波数関係 ( $\omega_{LO} > \omega_{IM}$ と仮定している)

## イメージ周波数は数学的に現れないだけで現実には回路のアンバランスで漏れ出してしまふ

このように目度度（めでた）く、イメージ周波数の信号はキャンセルされ、出力には現れないことが分かりました。しかしこれは数学的な話であり、回路に「誤差」があることによるアンバランスで、実際の回路の場合には、出力にこのイメージ周波数が漏れ出してしまいます。

たとえば1%精度の抵抗なんて「高精度」というイメージがあります。しかし  $20 \log(0.01) = -40\text{dB}$  であり、単純計算でも「1%誤差」の抵抗であっても-40dB程度の抑圧しかできないことになります。

ハートレー回路では上下それぞれの経路に、RCで45°位相をずらす回路が用いられています。上記のような1%精度の抵抗であっても、上下それぞれ目的の周波数で「ぴったり」と45°の位相シフトが出来ないことになりまますから、「限界がありそうだな」と直感的にも気がつくと思います。

また希望波が帯域幅を持ってれば、中心周波数から外れていく（これを「離調」といいます）にしたがって、上下それぞれの経路で45°の位相シフトから位相がずれていくことも気がつくと思います。

結局これらが誤差となり、抑圧度の限界が出てきます。

## イメージ周波数が除去されるようすをSPICEシミュレーションで追ってみる

図8のシミュレーション回路に、入力に希望波 $f_{RF}$ を加えていたものを、イメージ周波数の信号 $f_{IM}$  (4kHz)を加えたものとして修正してシミュレーションをおこなってみました。

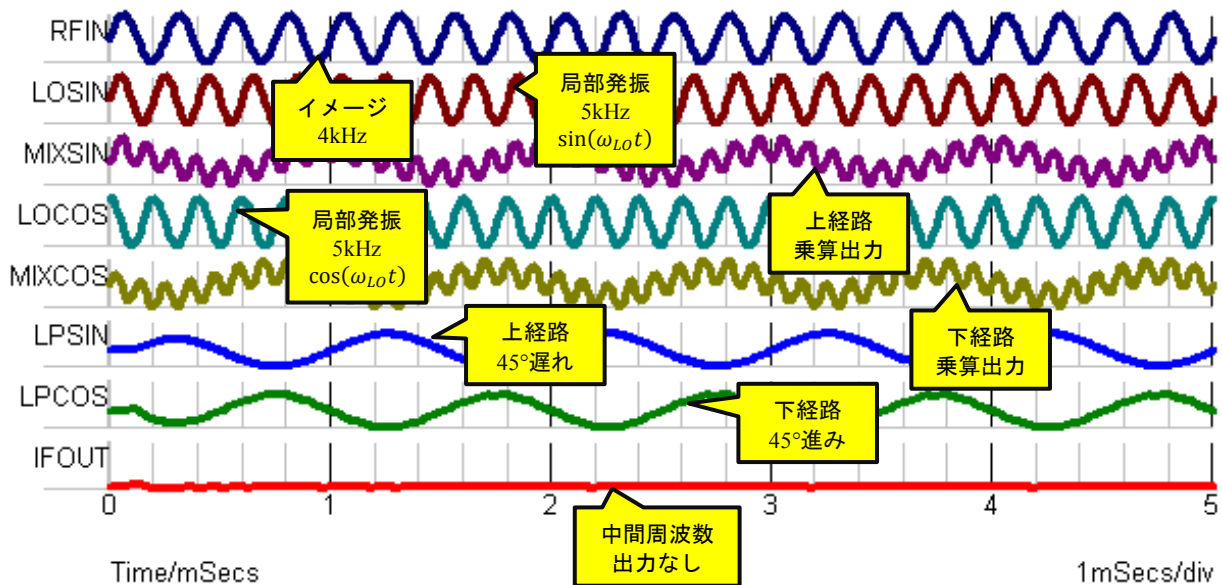


図 11. ハートレー構造でイメージ周波数の変換結果が出力で除去されるようす ( $f_{IM} = 4\text{kHz}$ ,  $f_{LO} = 5\text{kHz}$ )

シミュレーション結果を図 11 に示します。一番下の「中間周波数出力なし」のように、イメージ周波数の信号はキャンセルされて出力に現れてこないことが分かります。

それにしても面白い回路です…。よくできていますね。

## 三部作の最後の後編では

今回はアナログ信号における複素ミキシングとして、イメージ除去ミキサの動作について説明しました。

次の三部作の最後となる後編 TNJ-034 では、ここまで説明した複素ミキシングについて、AD変換された離散信号でのデジタル信号処理でどのようになるかを説明します。AD9680 という1.25GspsのADコンバータに内蔵されたDDC (Digital Down Converter) というものに関する質問に答えるかたちで話しを進めていきます。ご期待ください！

## 参考文献

- [1] バラエティ・アートワークス; アパホテル—利益を生み出す逆張りの成功哲学 (まんがで学ぶ成功企業の仕事術), 朝日新聞出版
- [2] 数学セミナー編集部編; 数学 100 の定理 ピタゴラスの定理から現代数学まで, 日本評論社