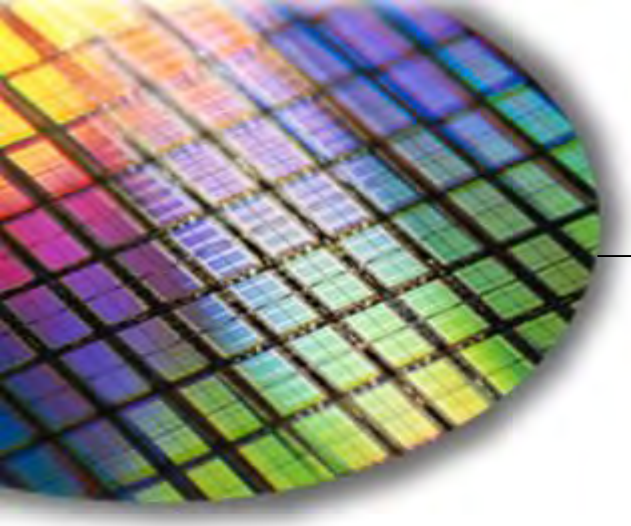
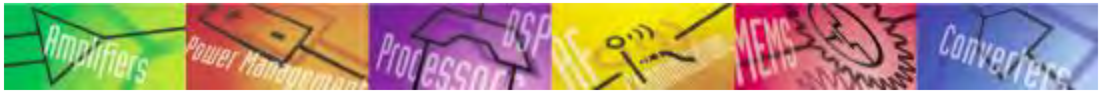


The World Leader in High Performance Signal Processing Solutions



PLL（位相ロック・ループ）の理論的側面をOPアンプとの比較で理解する（その2）

アナログ・デバイセズ株式会社
石井　聡

Agenda（その1）

1. 位相を制御する自動制御システムとしてPLLをモデル化してみる

2. 位相比較器とチャージ・ポンプは位相を基準にすれば線形（比例）入出力ブロック

3. VCOは「位相差に比例した制御信号で周波数が変化」とは

4. PLLをOPアンプと比較してみる

Agenda（その2）

5. ループ･フィルタも考慮にいれる

6. 帰還系の安定化をループ･フィルタに進み要素を入れて実現する

Agenda（その3）

7. 位相雑音を**OP**アンプのフィードバック回路で考える（① **PFD**ノイズ）

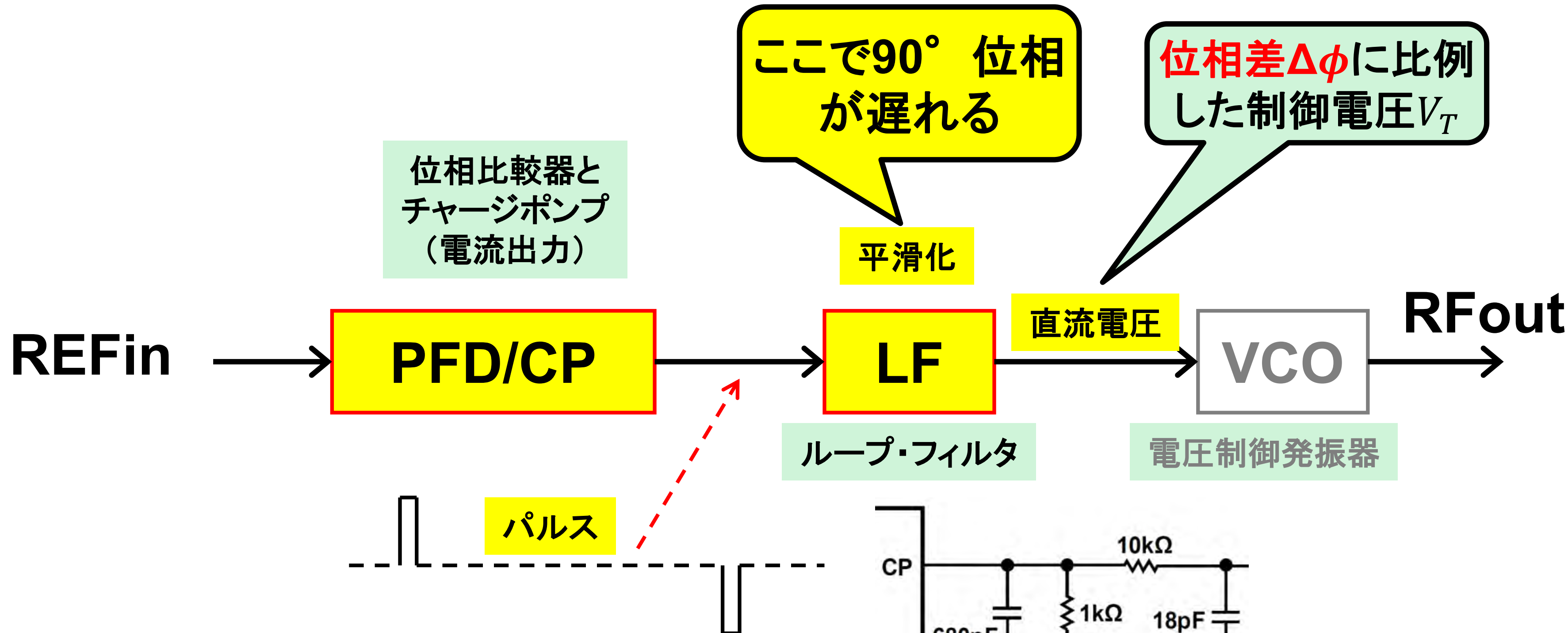
8. 位相雑音を**OP**アンプのフィードバック回路で考える（② **VCO**ノイズ）

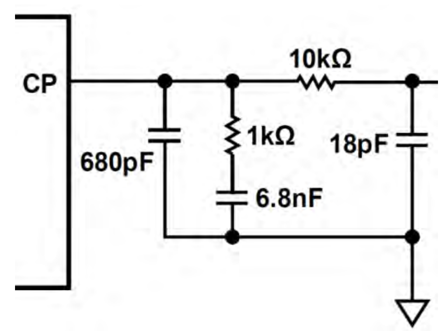
9. アクティブ･ループ･フィルタで生じるノイズの影響度の見積り

10. 実際に組んでみた回路で理論考察と比較してみる

5. ループ･フィルタも考慮にいれる

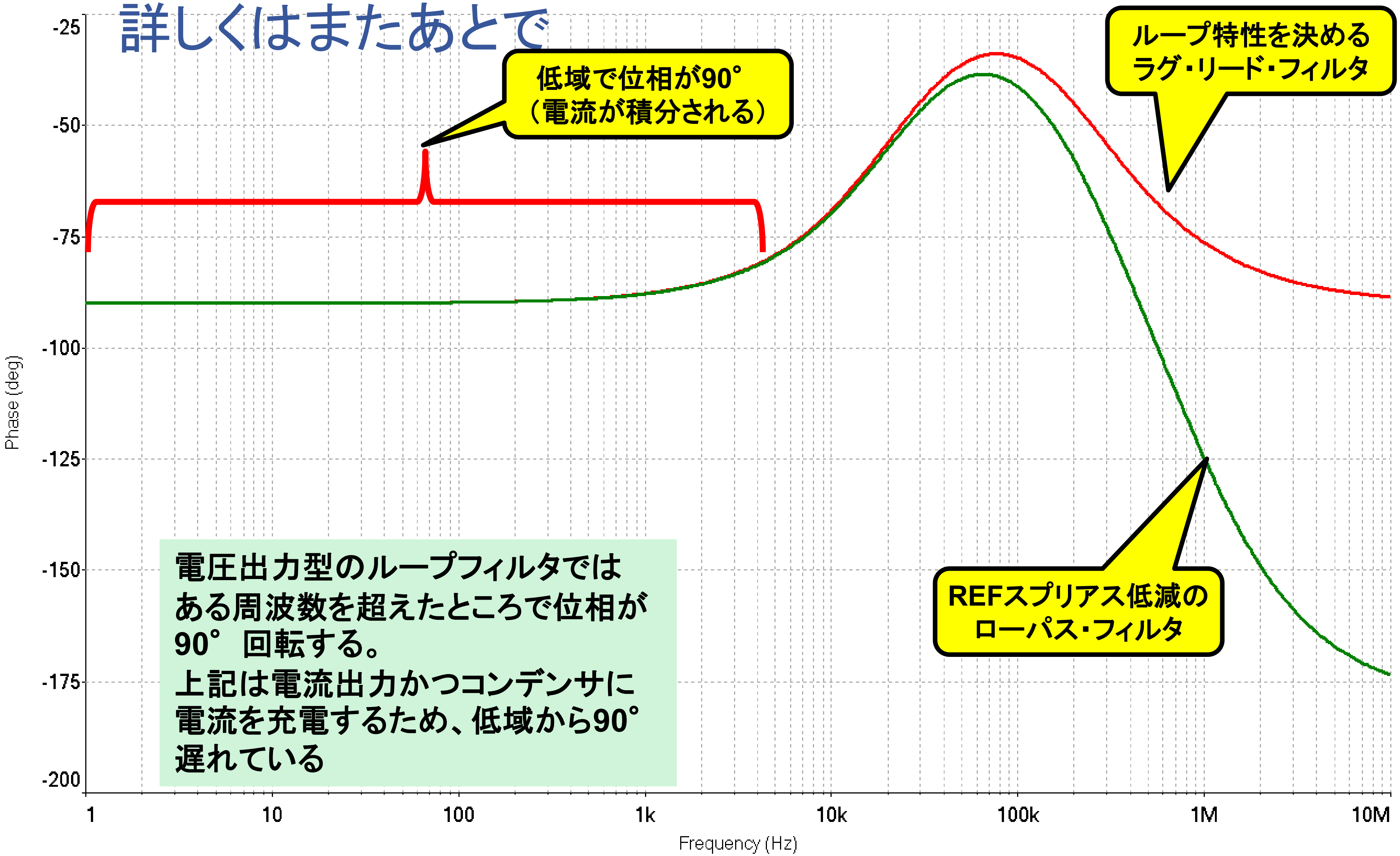
チャージポンプはパルス出力
平滑化するためには**LPF**が「**PLL**ではどうしても」必要



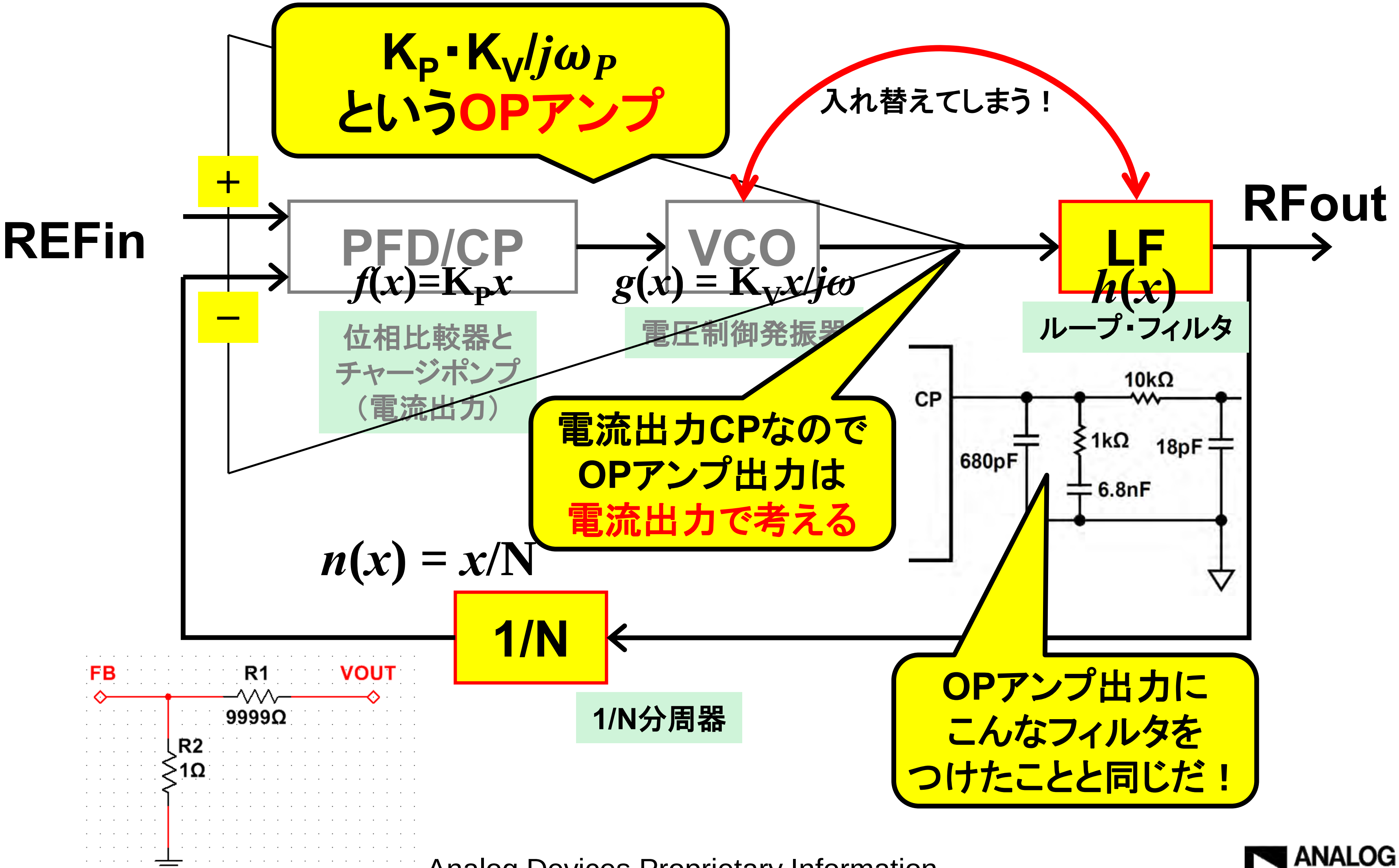


ところでループ・フィルタのカットオフはf_{PFD}/10以下が一般的（パルス・ノイズ除去のため）。

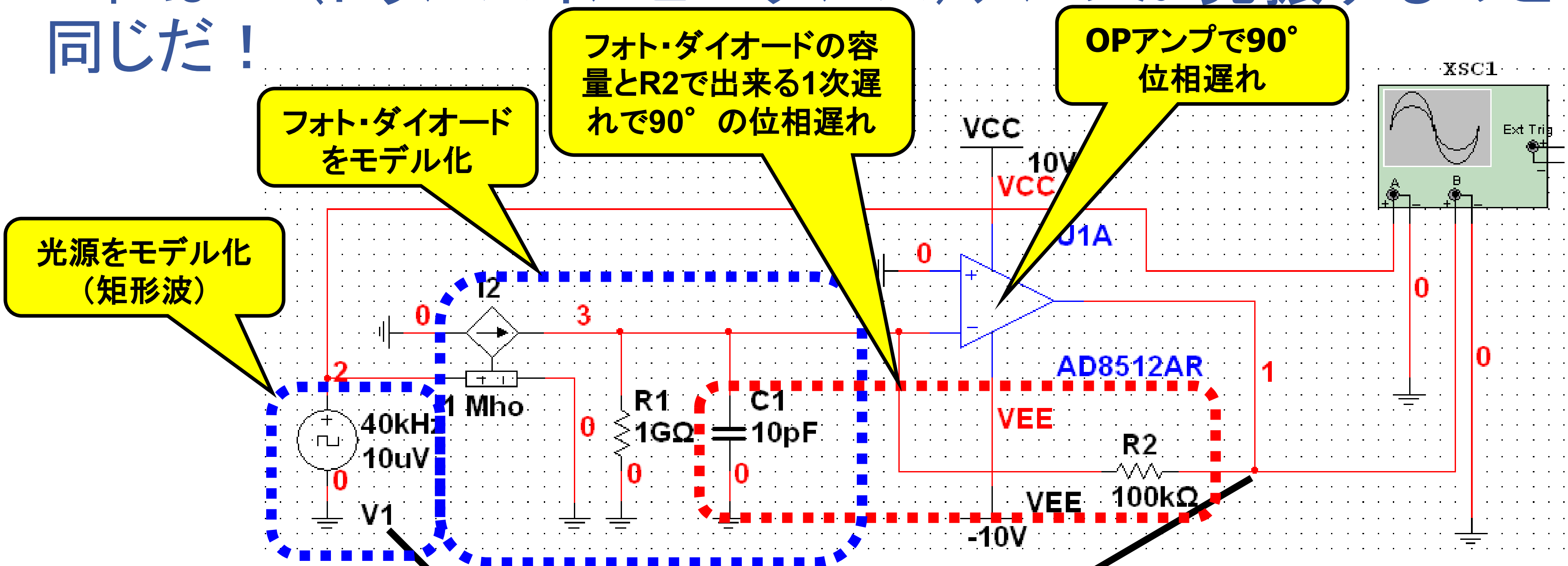
電流出力のループ･フィルタの周波数特性（位相）
詳しくはまたあとで

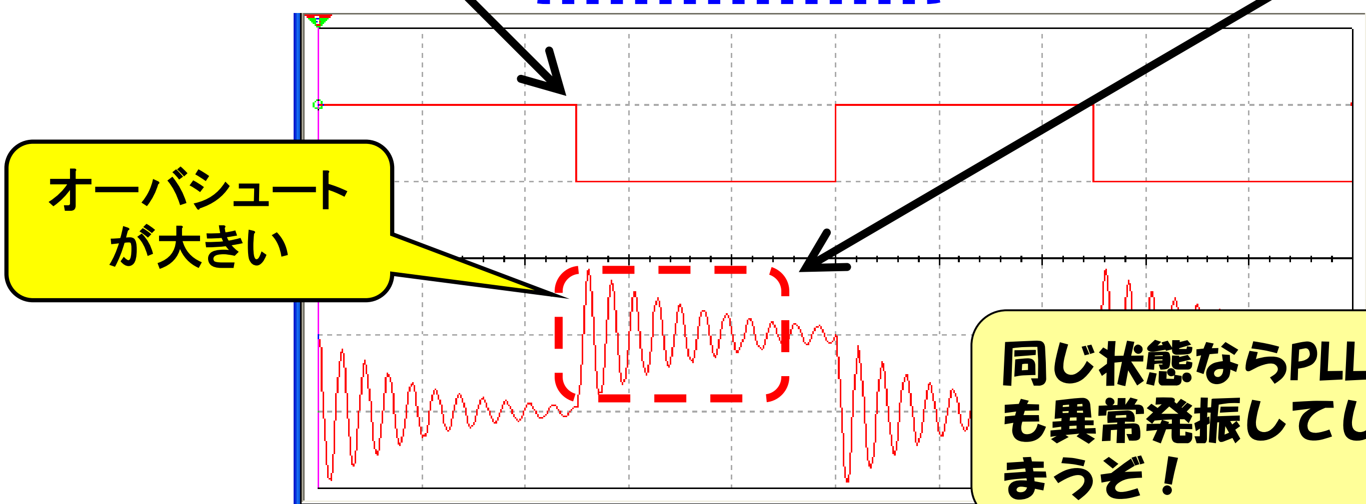


自動制御システムで理論的に考えるなら「電圧・電流・周波数などの物理量」は忘れていい



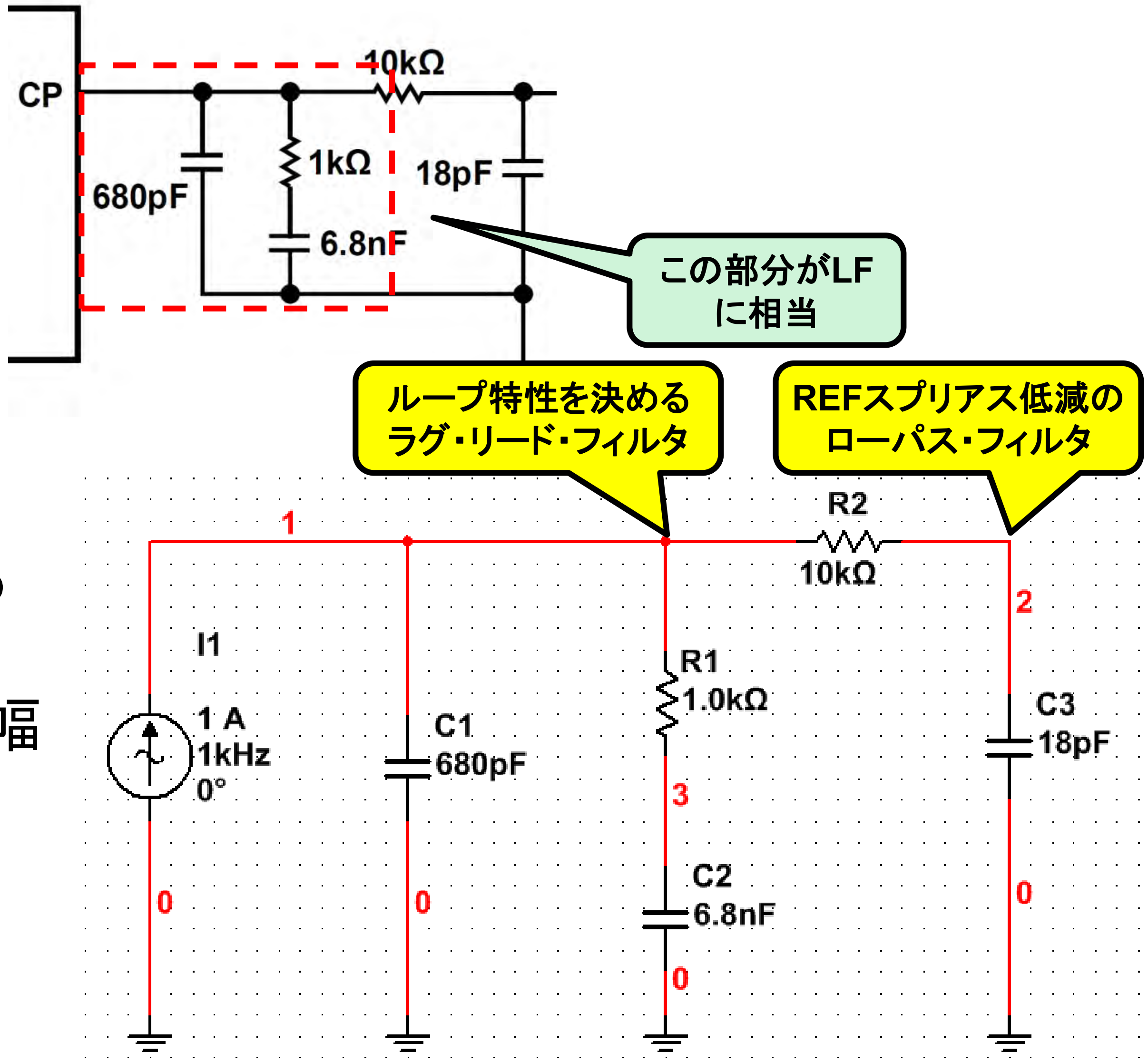
これはIV（トランスインピーダンス）アンプが発振するのと同じだ！





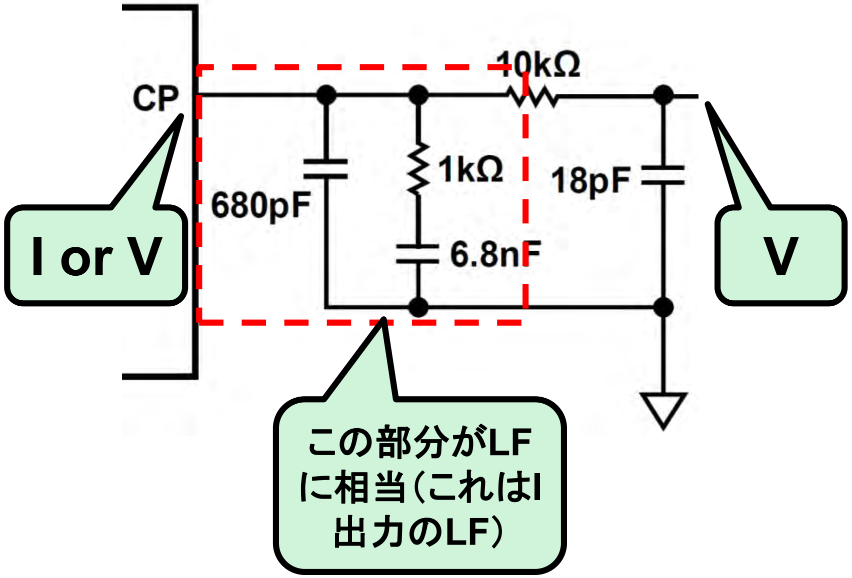
6. 帰還系の安定化をループ･フィルタに進み要素を入れて実現する

閉帰還応答特性を決定づけるループ･フィルタ



伝達関数として得られる
H(s) ⇒ V/mA（電圧/電流）は、周波数特性（振幅と位相）がある

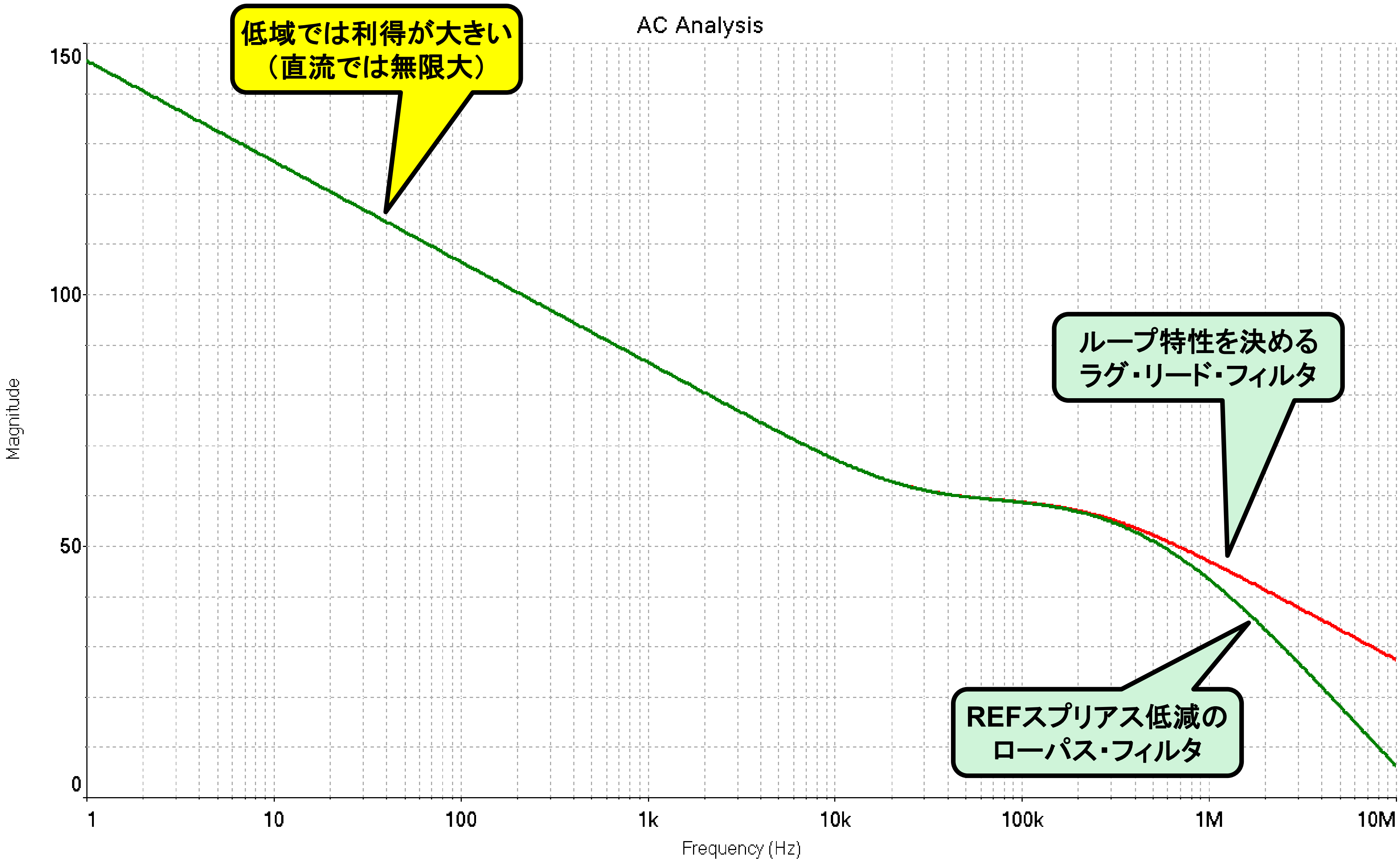
ループ･フィルタ：電流出力のケースと電圧出力のケース



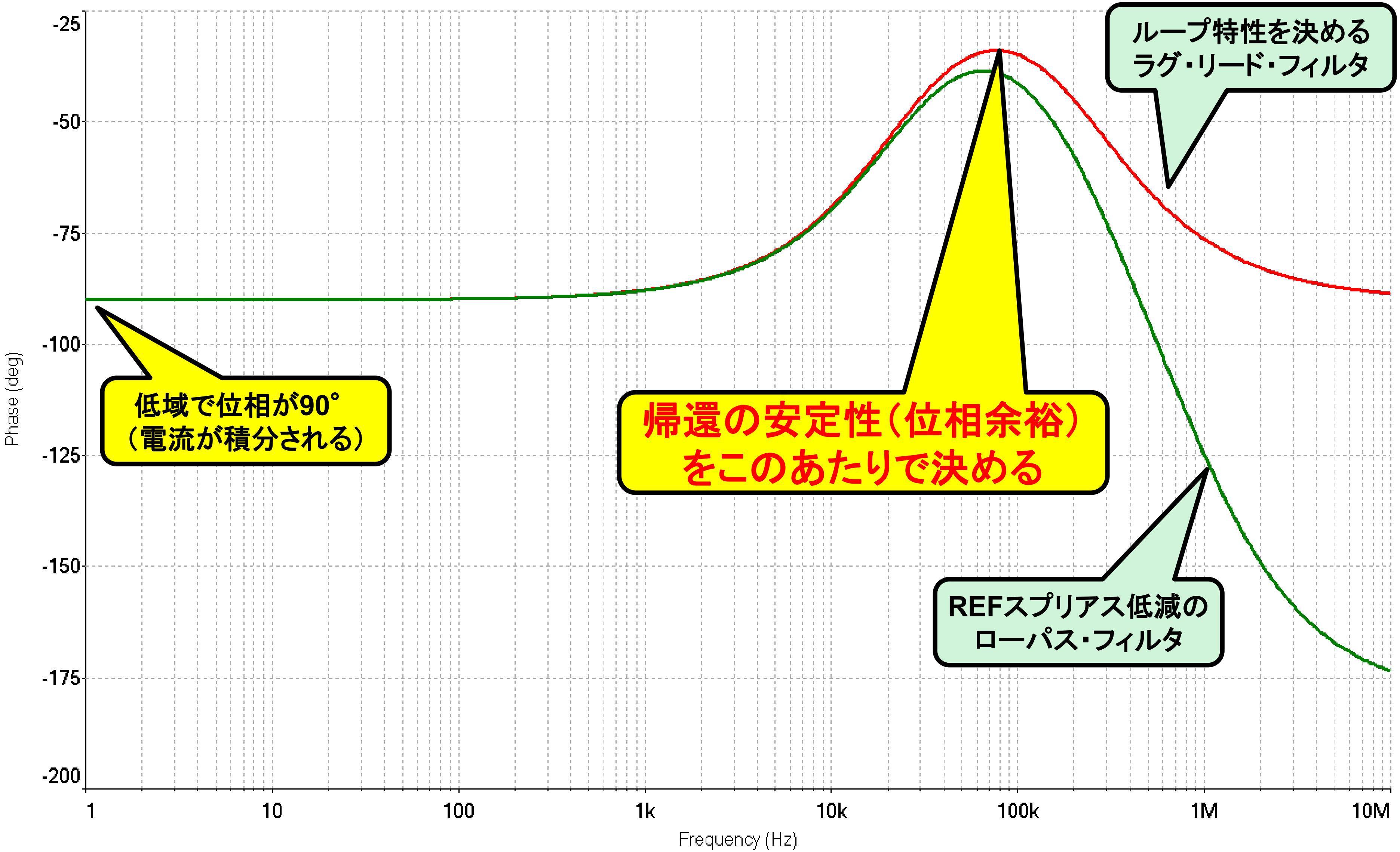
伝達関数として得られる
（電流）インピーンダンス（ラグ･リード特性をもつ）
（電圧）分圧的なラグリード･フィルタ

H(s) ⇒ V/mA（電圧/電流）は、周波数特性（振幅と位相）がある

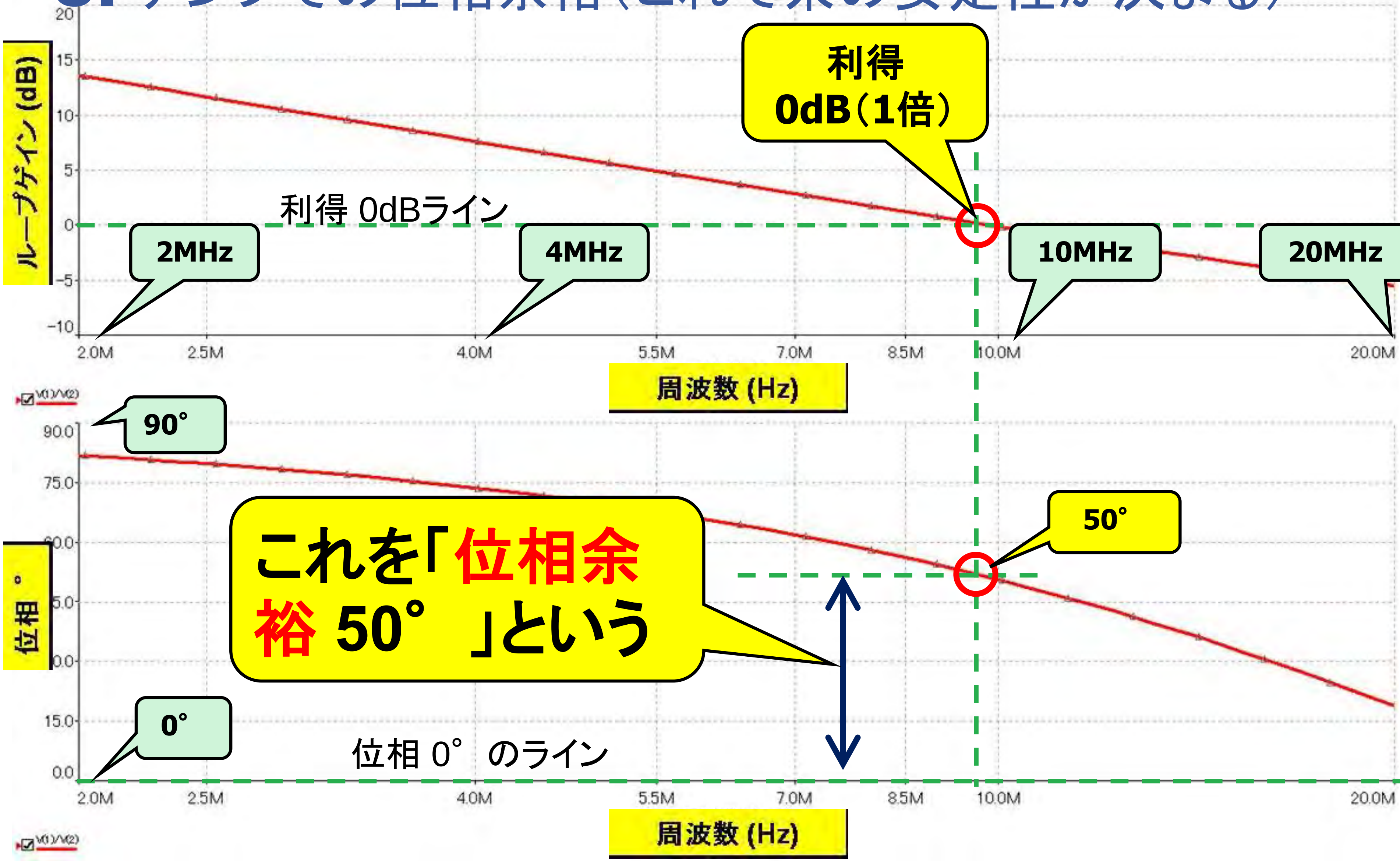
電流出力のループ･フィルタの周波数特性（振幅）



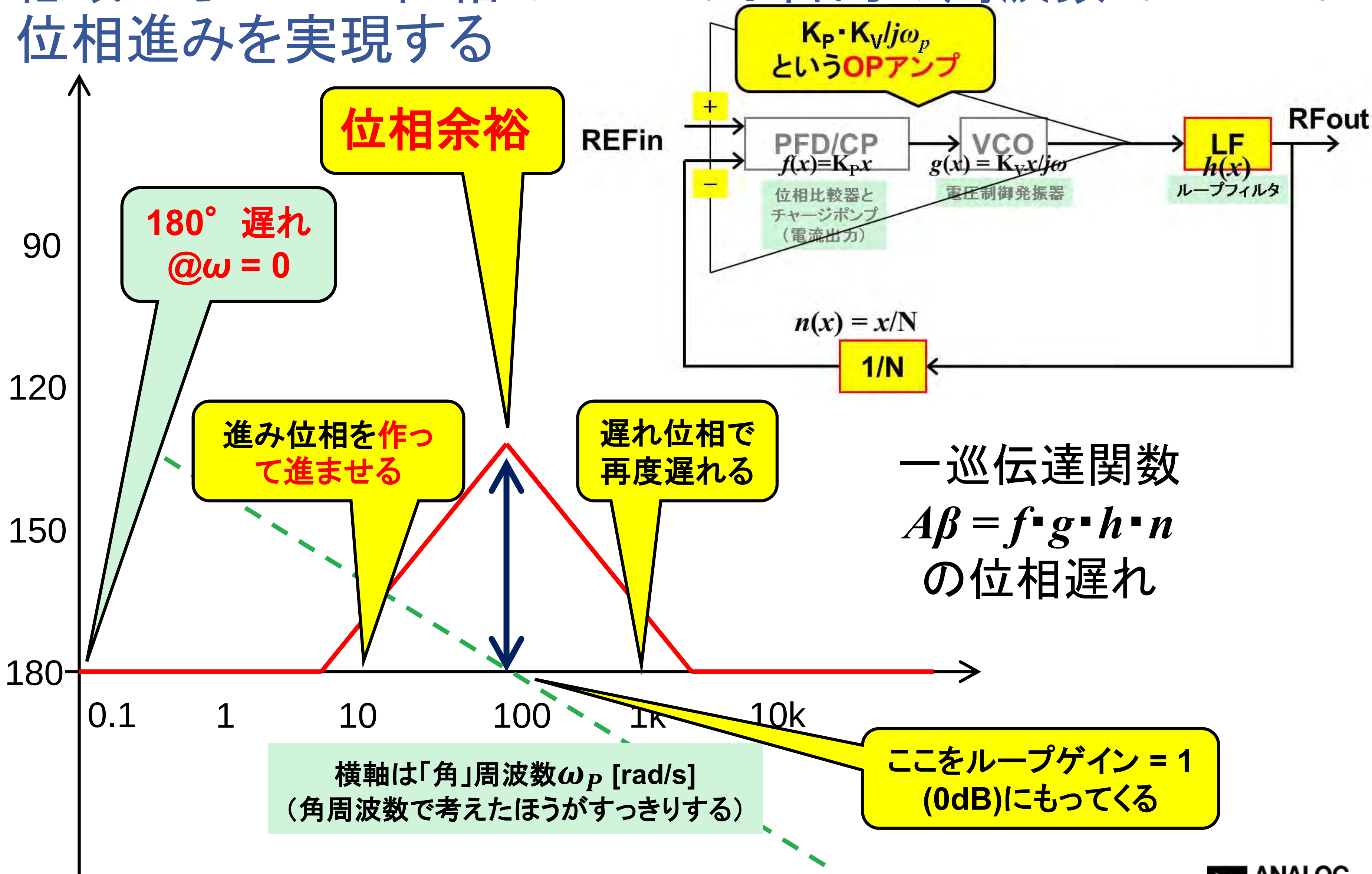
電流出力のループ・フィルタ(LF)の周波数特性(位相)



OPアンプでの位相余裕(これで系の安定性が決まる)



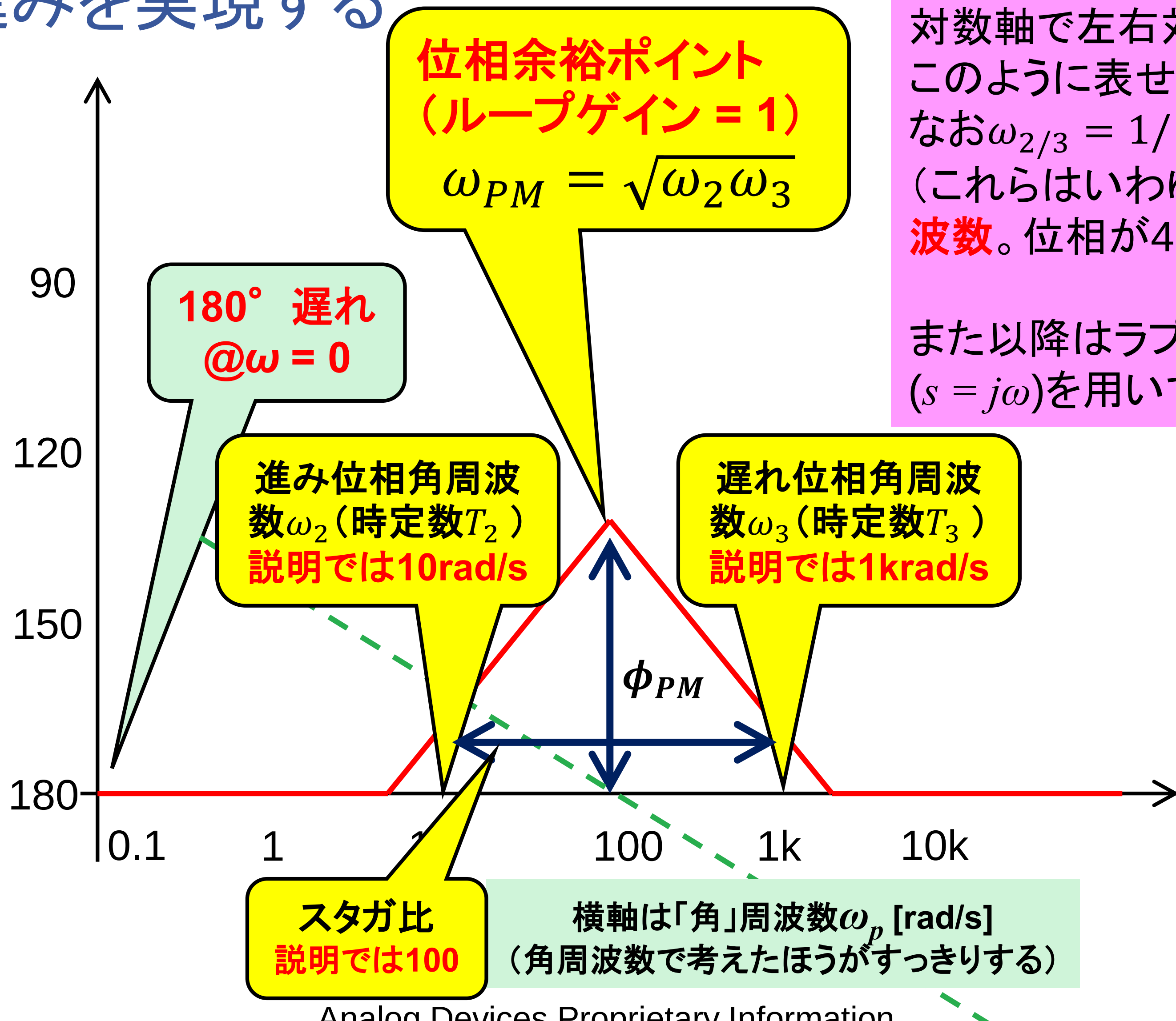
低域から180° 位相のPLLでは目的の周波数でLFにて位相進みを実現する



低域から180°位相のPLLでは目的の周波数でLFにて位相進みを実現する

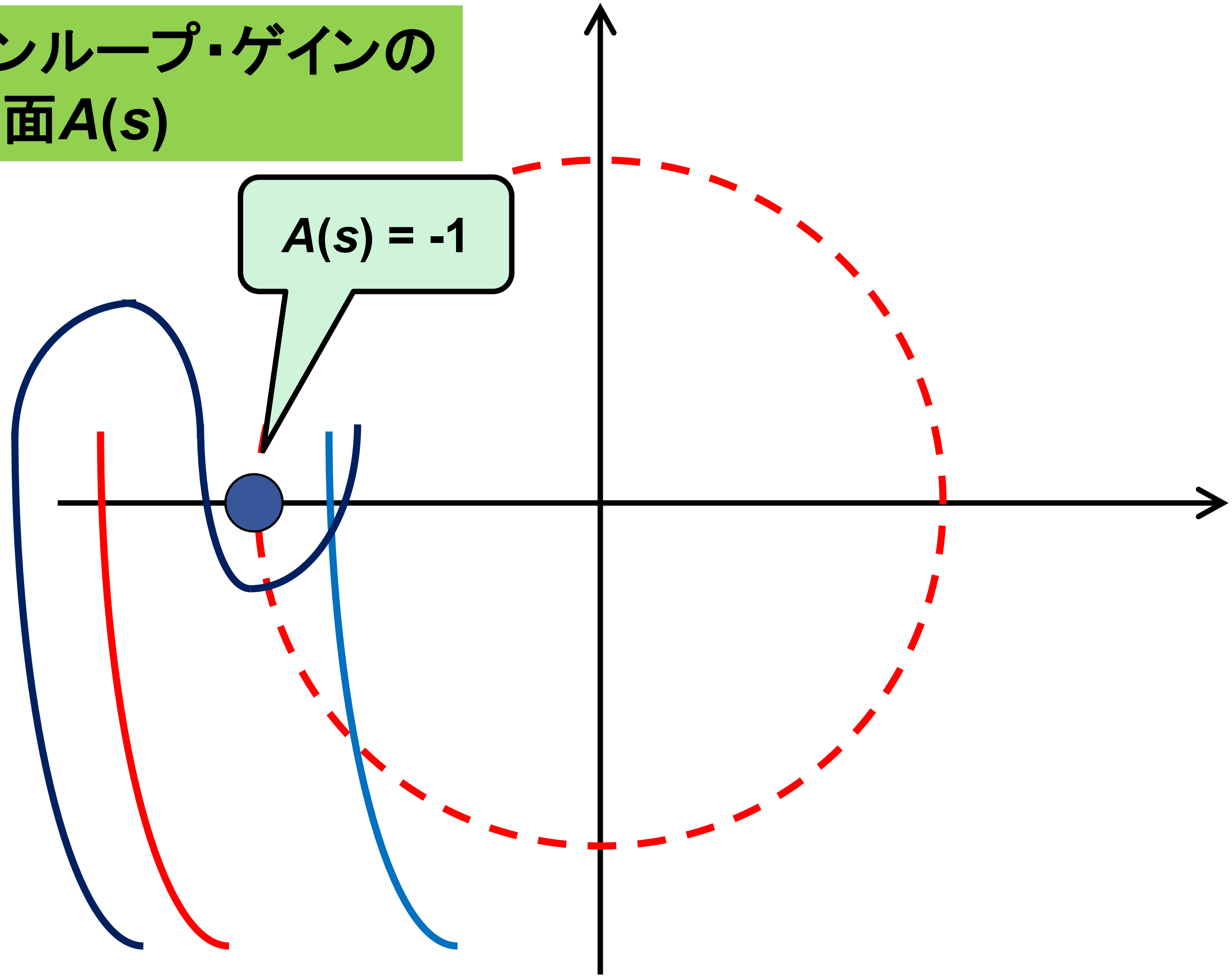
対数軸で左右対称なので
このように表せる
なお$\omega_{2/3} = 1/\ T_{2/3}$
（これらはいわゆる**-3dB角周波数**。位相が45°のところ）

また以降はラプラス演算子s
($s = j\omega$)を用いて説明する

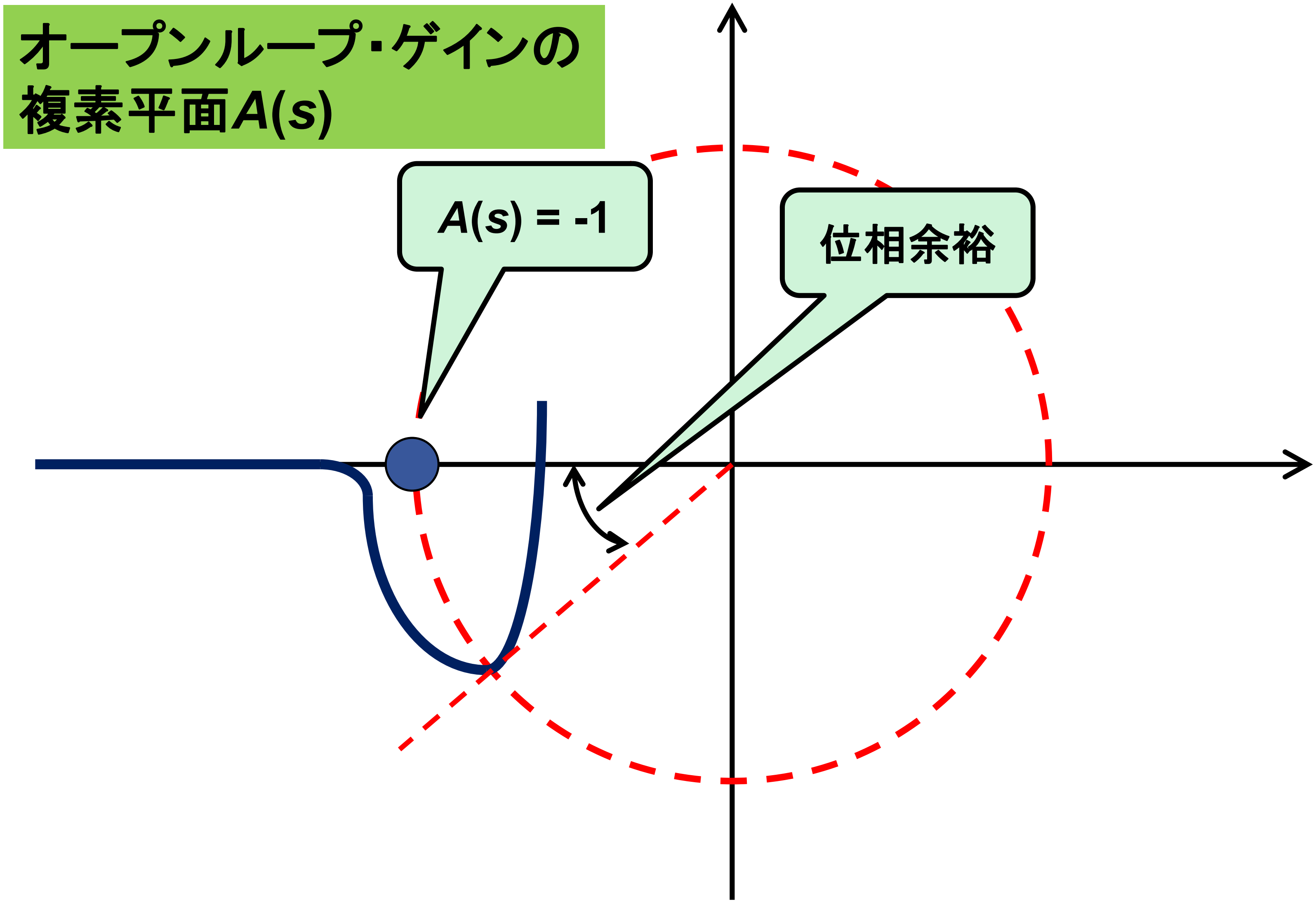


位相余裕を「ナイキストの安定判別法」で考える

オープンループ・ゲインの複素平面*A*(*s*)



PLLの伝達関数を「ナイキストの安定判別法」で考える

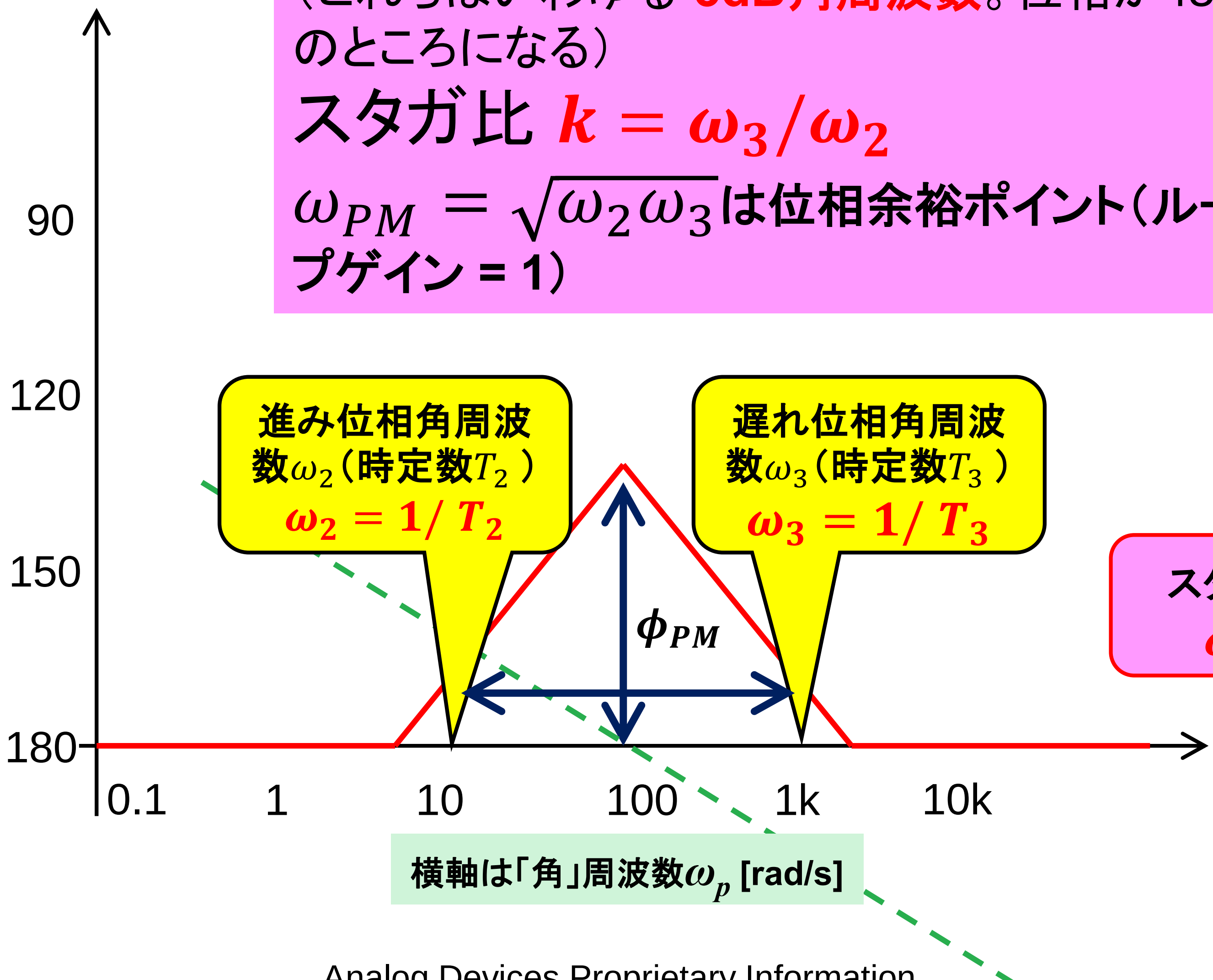


あらためて

$\omega_2 = 1/T_2,\ \omega_3 = 1/T_3$
（これらはいわゆる**-3dB角周波数**。位相が45°のところになる）

スタガ比 $k = \omega_3/\omega_2$

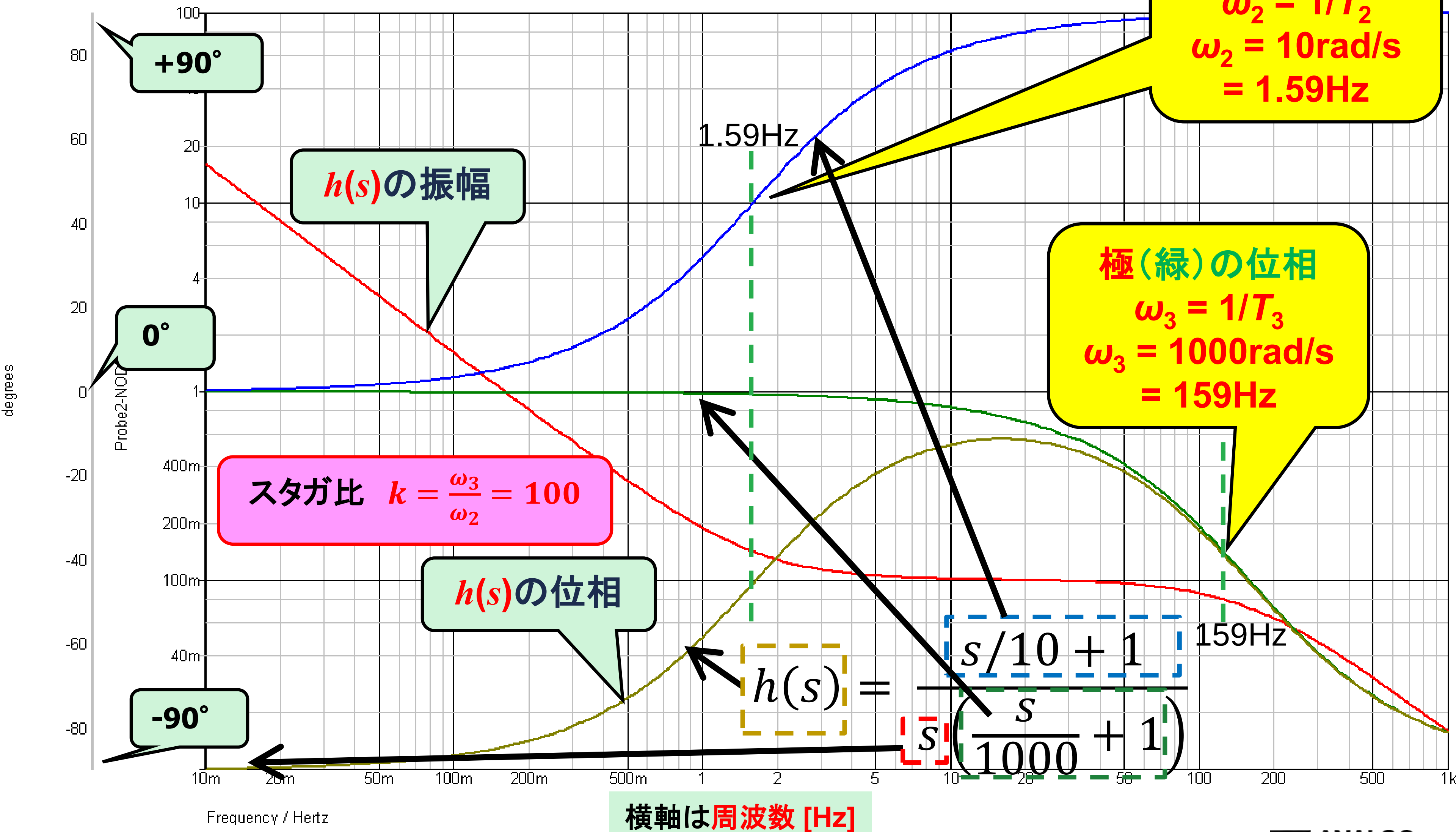
$\omega_{PM} = \sqrt{\omega_2\omega_3}$ は位相余裕ポイント（ループゲイン = 1）



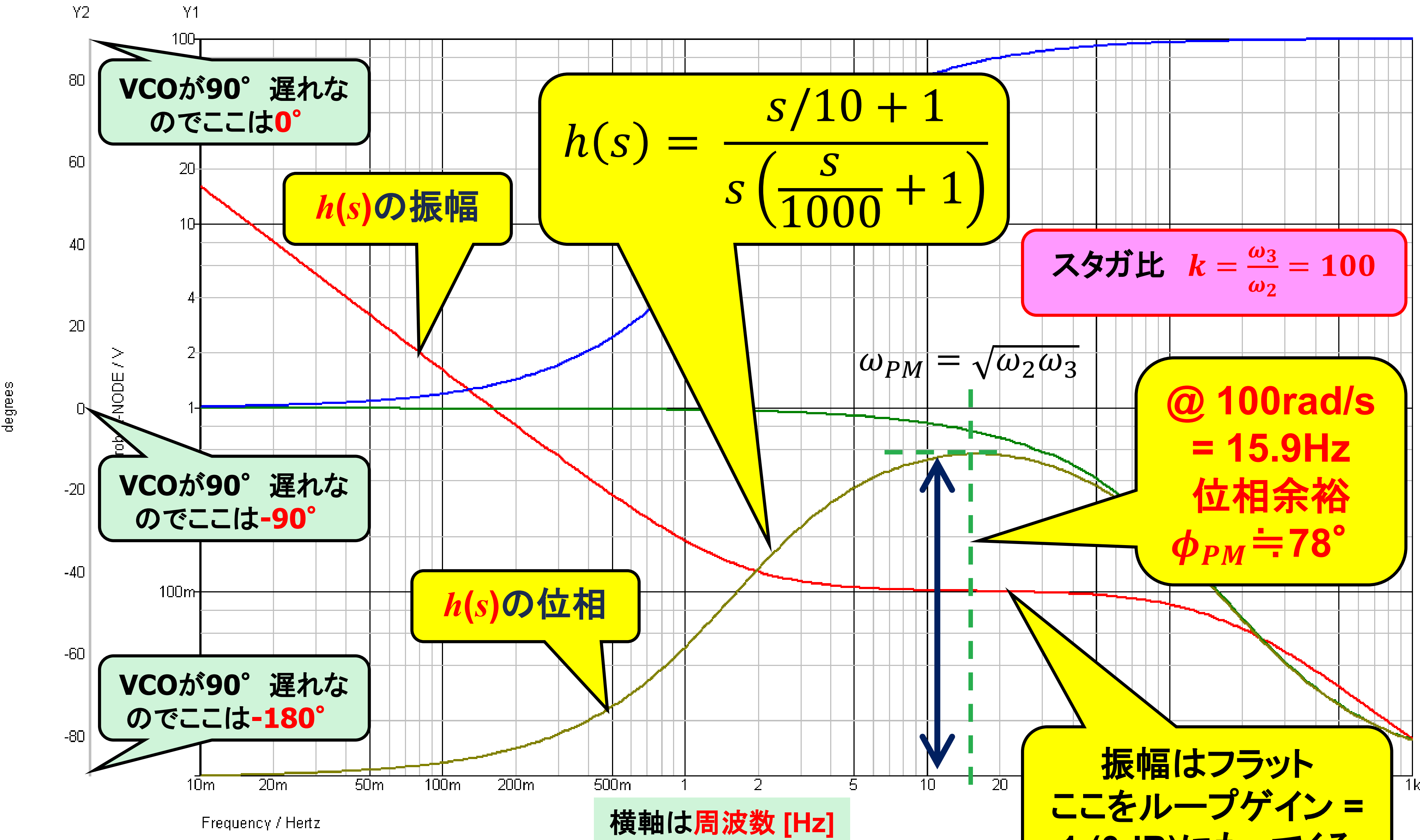
スタガ比 $k = \omega_3/\omega_2$

LFで位相進みを実現する･･･まずは数式的に

（LFの位相特性なのでVCOの90°遅れは入っていない）



ω = 100rad/s（15.9Hz）で位相進みが最大になる



一次系で角周波数ω [rad/s]の位相は？

CRによる一次系（たとえば遅れ系）はs平面では

$$h(s) = \frac{1/sC}{R + 1/sC} = \frac{1}{1 + sCR}$$

この系の角周波数$\omega_P(s = j\omega_P)$[rad/s]での位相ϕは

$$\phi = -\tan^{-1}\omega_P CR$$

CRはこの系の時定数T[s]であり、-3dB（位相$\phi = \pi/4$）の角周波数ω_{3dB}（$CR = T = 1/\omega_{3dB}$）なので、

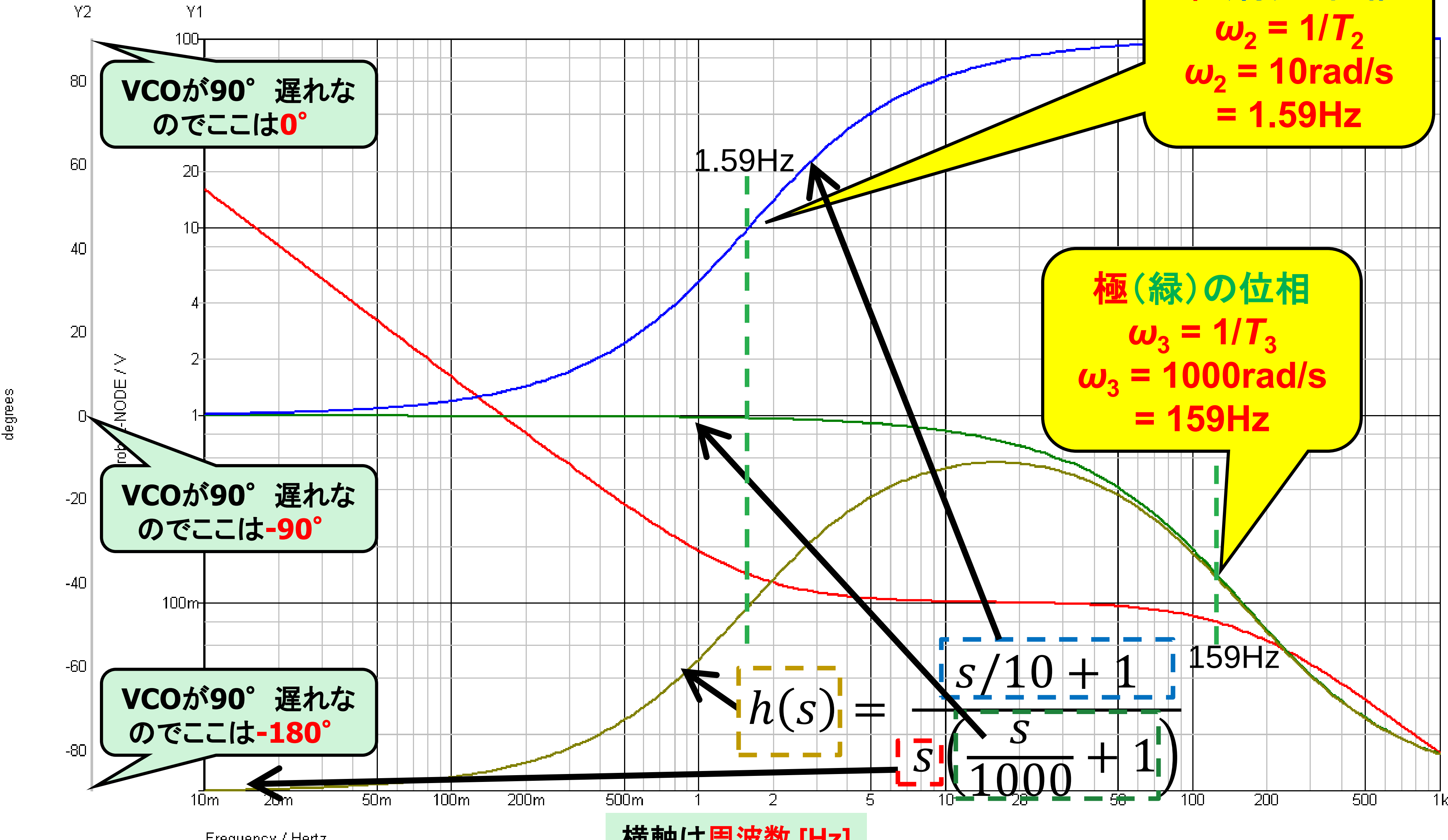
$$\phi = -\tan^{-1}\omega_P T = -\tan^{-1}\omega_P/\omega_{3dB}$$

同じく、

$$\tan\phi = -\omega_P T = -\omega_P/\omega_{3dB}$$

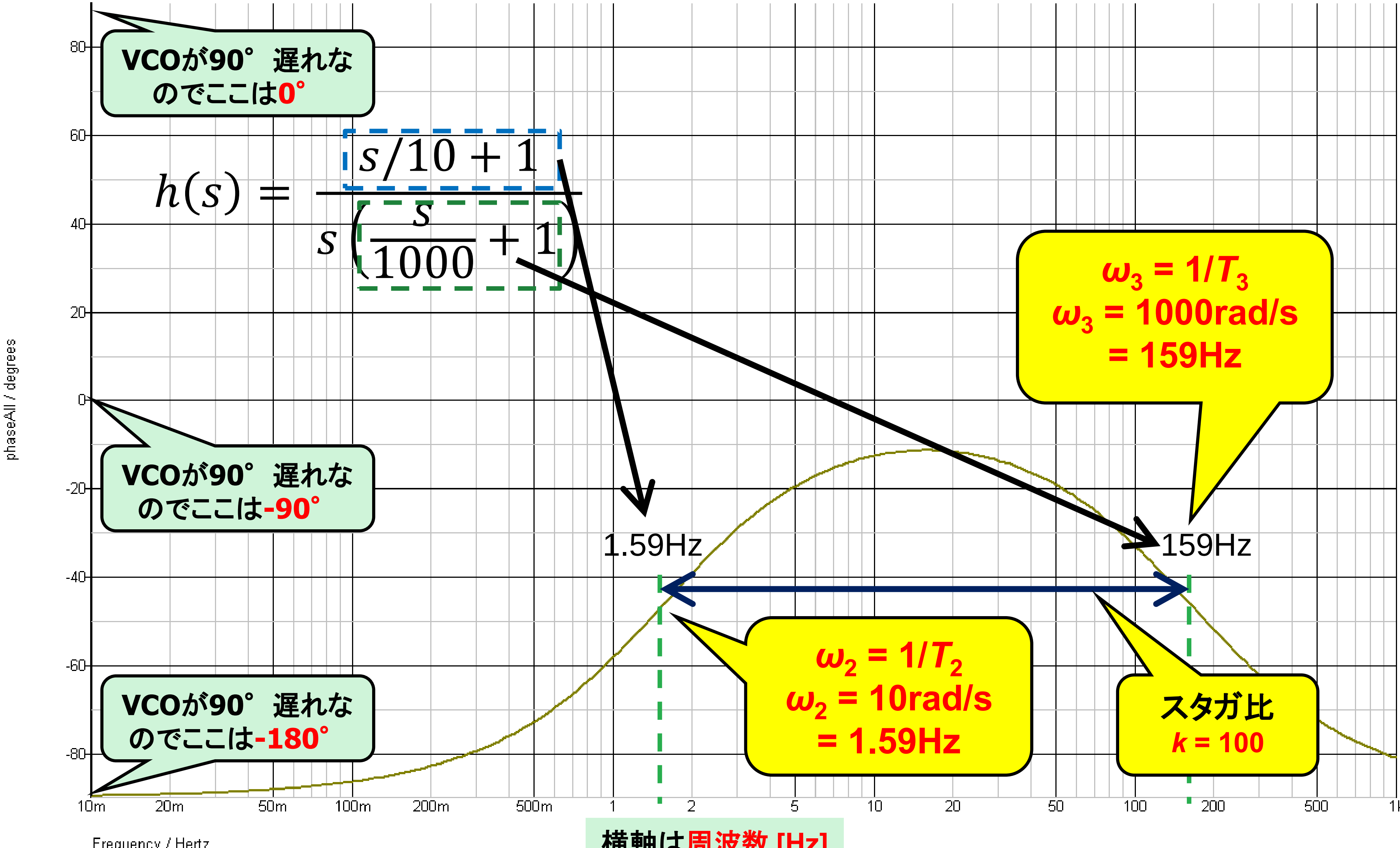
（進み系は符号がプラス）

位相関係を計算してみる



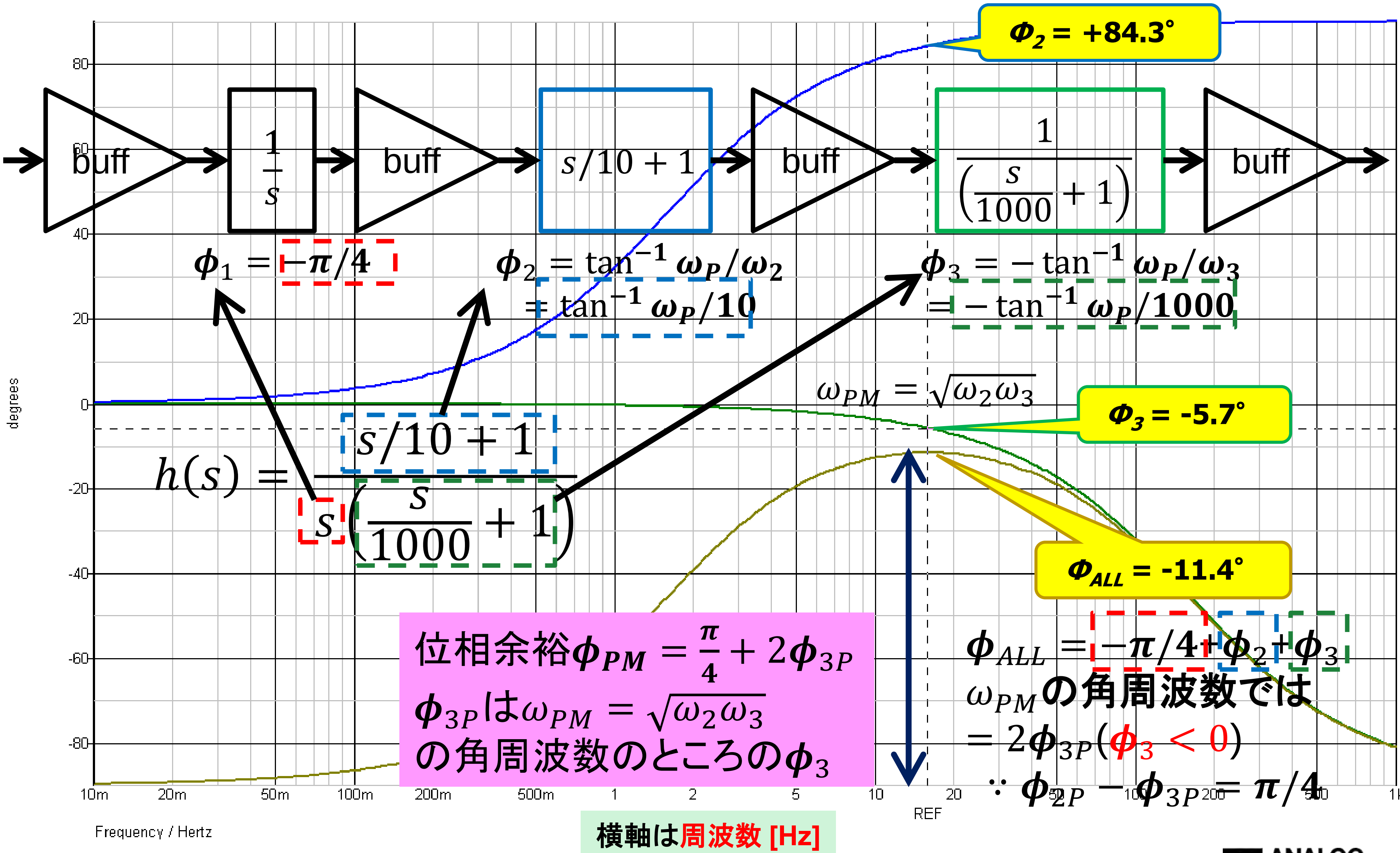
横軸は周波数 [Hz]

位相関係を計算してみる（つづき）



横軸は周波数 [Hz]

位相関係を計算してみる（こんなふうに考えればいい）



各定数を求めてみる

$\omega_{PM} = \sqrt{\omega_2\omega_3}$

位相余裕$\boldsymbol{\phi_{PM}} = \dfrac{\pi}{4} + 2\phi_{3P} = \dfrac{\pi}{4} - 2\tan^{-1}\dfrac{\boxed{\sqrt{\omega_2\omega_3}}}{\omega_3}$

$= \dfrac{\pi}{4} - 2\tan^{-1}\dfrac{\omega_{PM}}{\omega_3}$

$= \dfrac{\pi}{4} - 2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{\omega_2}{\omega_3}}$ （ただし$\boldsymbol{\phi}_{3P} < 0$）となる

スタガ比$\boldsymbol{k} = \dfrac{\boldsymbol{\omega_3}}{\boldsymbol{\omega_2}}$ から$\boldsymbol{\phi_{PM}} = \dfrac{\pi}{4} - 2\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$とも表せる

ω_2 = 10rad/s,
ω_3 = 1000rad/s
で検算しても正しい

位相余裕ϕ_{PM}と、その位相余裕を実現する角周波数ω_{PM}が決まれば、時定数$T_{2/3}$（角周波数$\omega_{2/3} = 1/T_{2/3}$）を求めることができる。
まずここではT_2 を求めてみる（次のスライド）

各定数を求めてみる（つづき）

ϕ_{PM}の式から$\phi_{3P} = \frac{1}{2}\left(\phi_{PM} - \frac{\pi}{4}\right)$

$\phi_{2P} - \phi_{3P} = \pi/4$から

$$\phi_{2P} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\phi_{PM} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \phi_{PM}\right)$$

$\tan\phi_{2P} = \boldsymbol{\omega_{PM}} T_2 = \boldsymbol{\omega_{PM}}/\boldsymbol{\omega}_2$から

$$T_2 = \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{\omega_{PM}} \tan\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \phi_{PM}\right)\right]$$

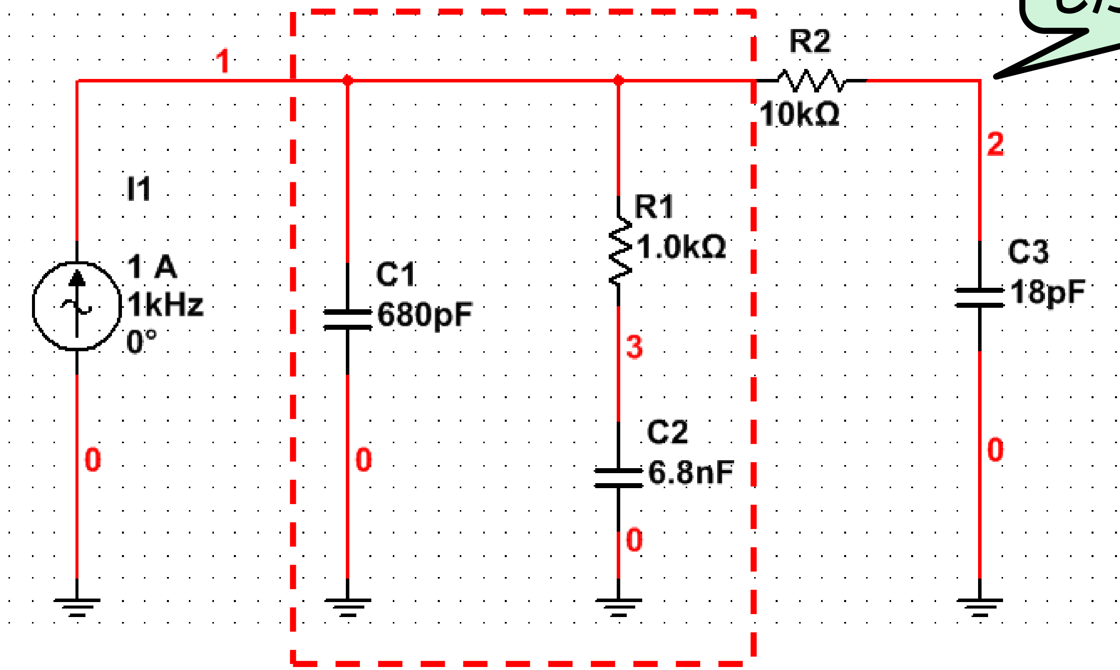
T_2は進みなので符号がプラス

時定数T_2（角周波数$\omega_2 = 1/T_2$）が求まれば、時定数T_3（角周波数$\omega_3 = 1/T_3$）も

$$\omega_{PM} = \sqrt{\omega_2 \omega_3} = \sqrt{\frac{1}{T_2 T_3}}$$ **から** $$T_3 = \frac{1}{\omega_3} = \frac{1}{\omega^2{}_{PM} T_2} = \frac{\omega_2}{\omega^2{}_{PM}}$$

伝達関数と素子の関係をみてみる

位相差$\Delta\phi$に比例した制御電圧V_T



電流出力CPならV$_T$までの伝達関数$h(s)$はインピーダンスZ

$$h(s) = Z(s) = \frac{sRC_2 + 1}{s(C_1 + C_2)\left(sR\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} + 1\right)}$$

伝達関数と素子の関係をみてみる（つづき）

これまでの式。目的の角周波数で、ループゲインを1（0dB）にできるように、係数（時定数）T_1を導入する

$$h(s) = \frac{sRC_2 + 1}{s(C_1 + C_2)\left(sR\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + 1\right)} = \frac{sT_2 + 1}{s\boxed{T_1}(sT_3 + 1)}$$

なお$\omega_{2/3} = 1/\ T_{2/3}$

$$T_1 = 1/\omega_1 = C_1 + C_2$$

$$T_2 = 1/\omega_2 = RC_2$$

$$T_3 = 1/\omega_3 = R\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

として選べばよい。なおT_1はω_{PM}でループゲインが1（0dB）になるように決める。
つまり

$$K_P\frac{K_V}{j\omega_{PM}}\frac{1}{N}h(\omega_{PM}) = \frac{K_P K_V}{N}\left|\frac{j\omega_{PM}T_2 + 1}{-\omega_{PM}{}^2 T_1(j\omega_{PM}T_3 + 1)}\right| = 1$$

T_2, T_3, ω_{PM}は既知なので、この式からT_1が得られる

伝達関数と素子の関係をみてみる（つづき）

さらに

$$\frac{K_P K_V}{N}\left|\frac{j\omega_{PM}T_2+1}{-\omega_{PM}{}^2 T_1(j\omega_{PM}T_3+1)}\right|=1$$

から

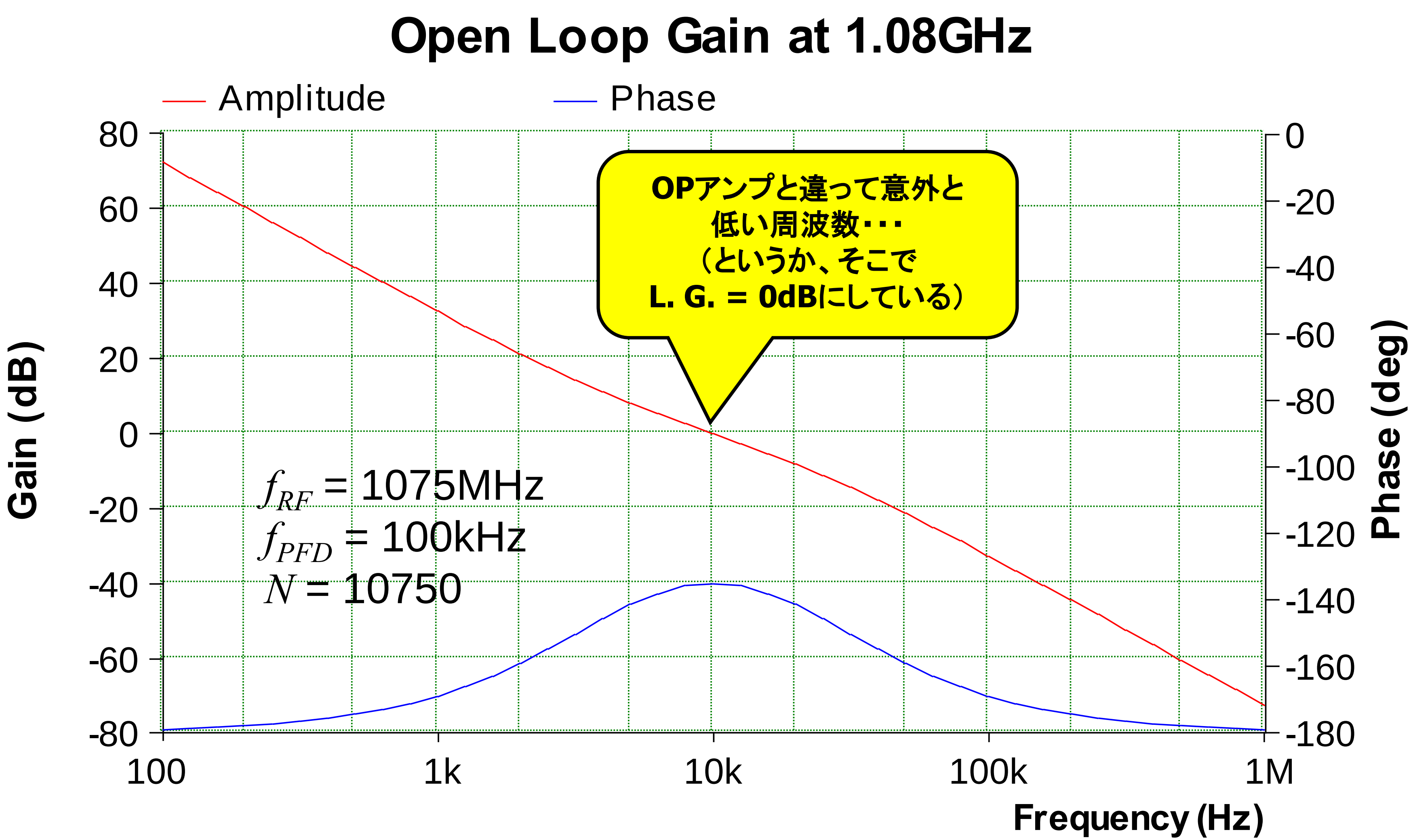
$$T_1=\frac{K_P K_V}{N}\frac{|j\omega_{PM}T_2+1|}{\omega_{PM}{}^2|j\omega_{PM}T_3+1|}$$

つづいて

$$T_3=\frac{C_1 T_2}{T_1}$$ から

$$C_1=\frac{T_1 T_3}{T_2} \qquad C_2=T_1-C_1 \qquad R=\frac{T_2}{C_2}$$ が得られる

おまけ：ループゲインを**ADIsimPLL**で計算してみた



ここまでのまとめ

- **PLLの伝達関数は経路に「ループ・フィルタ」が付いているOPアンプ回路とほぼ等価**
  - OPアンプ90°位相遅れ系
  - ループ・フィルタも単なるLPFなら90°位相遅れ系
  - つまり系が発振してしまう！
- **進み要素を入れてループの切れる周波数で位相余裕をつくる**
  - ω_{PM}と位相余裕ϕ_{PM}から時定数 $T_{2,3} = \dfrac{1}{\omega_{2,3}}$を求め・・・
  - 実際の定数を決定する
- **ここまで分かれば応答特性・ノイズ特性も自由自在！**

ANALOG DEVICES

ANALOG DEVICES