

本格的な MIDDLEBROOK 法によるループ・ゲインの測定（後編）

Middlebrook 法の適用とその検証

著者：石井 聡

はじめに

前回と今回の技術ノートでは、帰還増幅回路のループ・ゲインを測定する方法である「Middlebrook 法[1]」について、その本格的な活用方法を説明しています。

前回の技術ノートではそのうち、基本的な測定方法、そして電圧注入法の考え方としくみをご説明しました。つづいて「 $Z_{OUT} \ll Z_{FB}$ 」という関係になっていない系での OP アンプ増幅回路で、電圧注入法だけの測定では誤差が生じるようだという課題（疑問）を提示いたしました。今回の技術ノートではこの点について深く考えてみたいと思います。

電流注入法を併用する本格的なループ・ゲイン測定方法「Middlebrook 法」

「 $Z_{OUT} \ll Z_{FB}$ 」という関係になっていないケース、つまり Z_{OUT} と Z_{FB} が近接した系においては、「電圧注入法」と以下に示す「電流注入法」を併用することで、正しいループ・ゲインを求めることができます。

図 1 は Middlebrook 法の一部として用いる「電流注入法」です。この電流注入法は本来、「 $Z_{OUT} \gg Z_{FB}$ 」という関係の系に適用できるものです。

電流注入法のシミュレーション結果からループ・ゲインを得るには、図中の V1, V2 を流れる電流の比

$$I(V1)/I(V2)$$

を計算します。ここで V1, V2 の電流検出極性、つまり V1, V2 がつながっている極性に注意が必要です。

電圧注入法で得られたループ・ゲインを T_V 、電流注入法で得られたループ・ゲインを T_C とすれば、 Z_{OUT} と Z_{FB} が近接した系における本来のループ・ゲイン T は

$$T = \frac{T_V T_C - 1}{2 + T_V + T_C}$$

で計算できます（参考文献[1, 2]）。ここでの計算は

$$T_V = -1 \times \frac{V(VOUT)}{V(VFB)}$$

$$T_C = -1 \times \frac{I(V1)}{I(V2)}$$

とマイナスの符号を用いて、それぞれ答えを得ることになっており、

$$T = \frac{\frac{V(VOUT)}{V(VFB)} \times \frac{I(V1)}{I(V2)} - 1}{2 - \frac{V(VOUT)}{V(VFB)} - \frac{I(V1)}{I(V2)}}$$

とすることで、ループ・ゲインの位相は 0° からスタートして、 180° 位相に遅れていくようになります。こうなると（マイナス

の符号が用いられることで) 180° 位相からの位相戻り量が位相余裕になりますので、注意してください。ここで示した符号（極性）の説明は参考文献[1, 2]には詳しい記載がなく、また参考文献[1]はよく読むと電圧・電流の検出極性が逆になっていて、混乱を生じるものでありました…。この技術ノートで説明しているものは、最終的には参考文献[3]の説明から実際にシミュレーションで実験して確認できたものです。

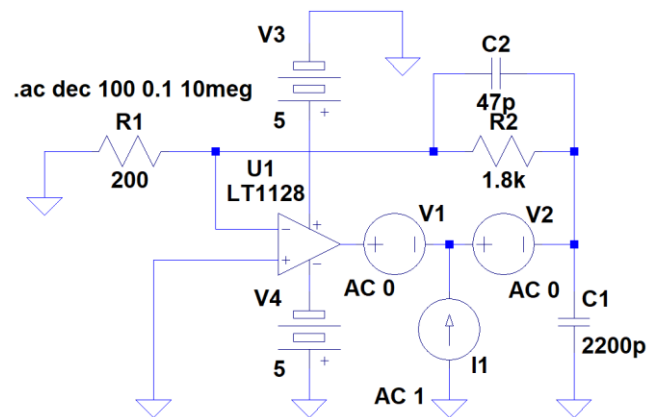


図 1. Middlebrook 法の「電流注入法」を用いたループ・ゲイン（位相余裕）を求める LTspice のシミュレーション回路

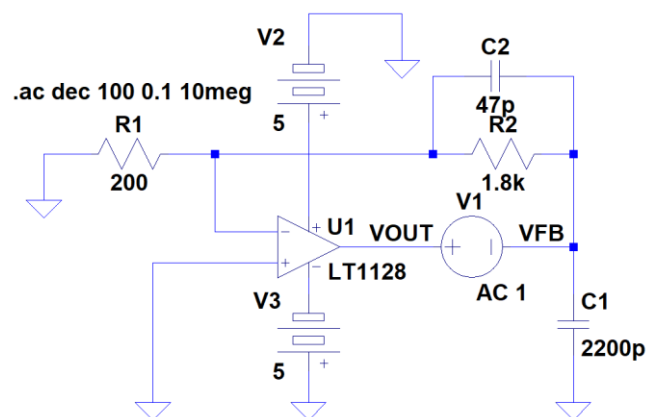


図 2. TNJ-054 の図 11 で示した「電圧注入法」を用いたループ・ゲイン（位相余裕）を求める LTspice のシミュレーション回路

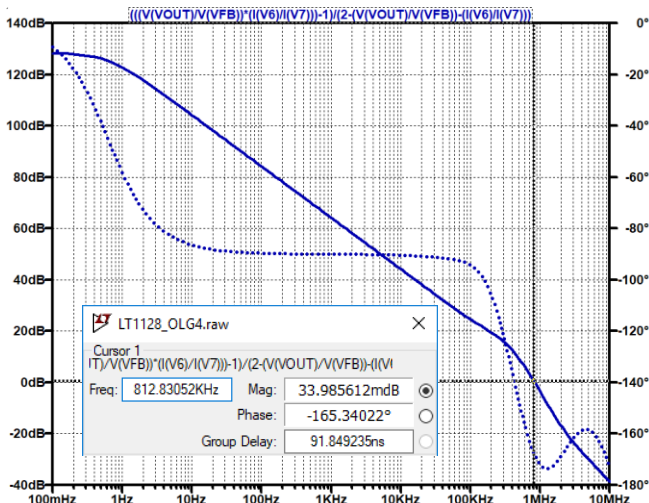
アナログ・デバイセズ株式会社は、提供する情報が正確で信頼できるものであることを期していますが、その情報の利用に関して、あるいは利用によって生じる第三者の特許やその他の権利の侵害に関して一切の責任を負いません。また、アナログ・デバイセズ社の特許または特許の権利の使用を明示的または暗示的に許諾するものでもありません。仕様は、予告なく変更される場合があります。本紙記載の商標および登録商標は、それぞれの所有者の財産です。
©2019 Analog Devices, Inc. All rights reserved.

負荷容量のついた Z_{OUT} と Z_{FB} が近接した LT1128 の帰還増幅回路での正しいループ・ゲインが得られた

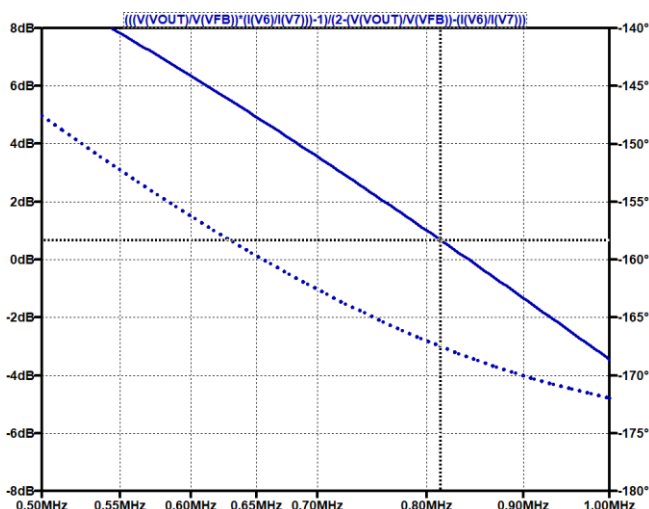
それではここで示した電流注入法（図 1）と前回の技術ノートの図 11（電圧注入法。あらためて図 2 に再掲しました）を一つのシミュレーション回路図にして、上記の式をグラフ機能で計算させてみます。得られた結果を図 3 に示します。位相余裕は 15° ある ($180 - 165 = 15$) ことがわかりました。この結果は、ひとつ前の技術ノート (TNJ-054) の図 14 に示した、AC 解析でのシミュレーション結果の「ゲイン・ピークが 11dB もあり、位相余裕は 15° 程度と考えられます。」ということと整合が取れることがわかります。

このように電圧注入法と電流注入法を併用した Middlebrook 法を適用することで、 Z_{OUT} と Z_{FB} が近接した系においても正しいループ・ゲインを求めることができます。これは重要なノウハウと言えることです。

申し上げたいことは、LTspice では、TNJ-054 で「シミュレーション実行後にループ・ゲインを表示させるには」で示したように、極性（符号）を考えて、LTspice でのグラフ画面で Add Trace で Expression(s) to Add で式を設定するということです。



(a) 0.1Hz から 10MHz でのプロット



(b) 500kHz から 1MHz に拡大したプロット

図 3 電圧注入法と電流注入法を併用してループ・ゲインを計算した

電流注入法を併用せず実現する等価的な方法

実際の回路では図 1 のように電流測定をすることは難しいといえるでしょう。電流測定だけであれば電流プローブを用いれば実現は可能ですが、「さて電流源をどうする？」となるとちょっと大変かもしれません (Middlebrook の論文[1]では Figure 13 に電流源の内部インピーダンスは有限でも影響がないと説明されています)。それでも電流源回路としては、たとえば Howland 回路が考えられ、アナログ・デバイスでも

LT6375 同相電圧範囲が $\pm 270V$ の差電圧アンプ

<https://www.analog.com/jp/LT6375>

【概要】

LT6375 は単位利得の差電圧アンプで、優れた DC 精度、非常に高い入力同相電圧範囲、および広い電源電圧範囲を兼ね備えています。このデバイスは、高精度オペアンプと高整合の薄膜抵抗回路網を内蔵しています。このデバイスの特長は、優れた CMRR、非常に低い利得誤差、および非常に低い利得ドリフトです。

LT6375 は同相電圧範囲の高い既存の差電圧アンプと比較して、抵抗分割器の比を選択できるので、特定の入力同相電圧範囲で最大の SNR 精度、および速度を実現可能にすることにより、優れたシステム性能を発揮します。

を使って、 $\pm 5mA$ Howland Current Source というものが紹介されています[4]。また技術資料としては、[5]が電流源のコレクションとして参考になるものでしょう。

電流源を使わずに何とかしたい

電流源を使わない代替方法として、[6]で説明されている方法があります。これはループ途中にバッファを挿入して、「 $Z_{OUT} \ll Z_{FB}$ 」という条件を実現するものです。これを図 1 や図 2 の LT1128 の回路に適用したものを図 4 に示します。

ここで注意すべきことは、OP アンプの出力でループを切った (バッファを挿入した) としても、OP アンプ出力 (バッファ入力) に、もともとの OP アンプの負荷となる帰還抵抗 (図 1 では R1, R2 に相当) や負荷容量 (図 1 では C1 に相当)、補償容量 (図 1 では C2 に相当) を接続しておくことです。これは OP アンプ出力が駆動する回路部分はきちんとモデル化しておかないといけない、ということです。ちなみに厳密には LT1128 の入力容量も！…ですが、ここではそこまで示していません。

図 5 にシミュレーション結果を示します。図 3 に示した、電圧注入法と電流注入法を併用してループ・ゲインを計算させた Middlebrook 法の結果とほぼ一致していることがわかります。なおこのシミュレーション結果では

$$-1 * V(VOUT) / V(VFB)$$

でグラフ描画設定をしており、位相関係を -180° を基準として、図 3 と同じにしてあります。

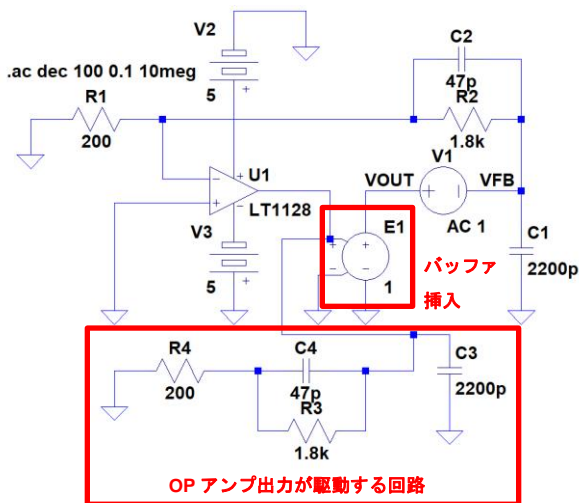


図 4. ループ途中にバッファを挿入して $Z_{OUT} \ll Z_{FB}$ という条件を実現する LTspice のシミュレーション回路

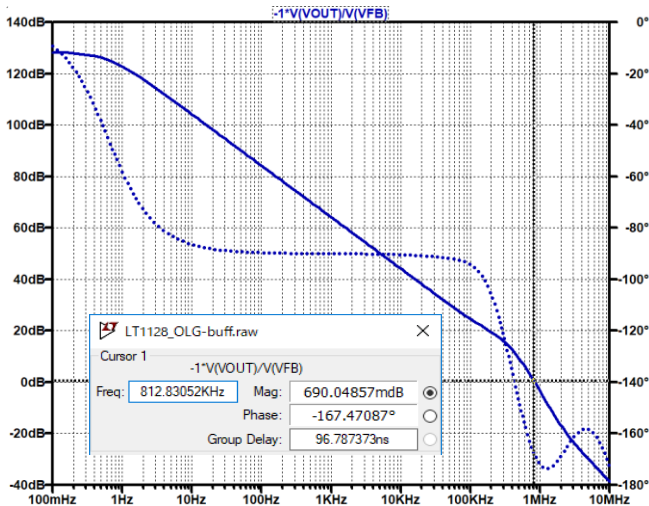


図 5. 図 4 のシミュレーション結果。Middlebrook 法の結果とほぼ一致している

実機で測定するには

より詳細かつ本格的に、実際の機器のループ・ゲインや位相余裕の測定をしたい場合は、参考文献[7]の測定器「周波数特性分析器」Frequency Response Analyzer; FRA を用いるとよいでしょう。これは業界標準ともいえる有名な測定器です。この場合でもここまで示した誤差要因は同じようにあり、 Z_{OUT} と Z_{FB} が近接した系においては、前節の等価方法を使う必要があるようです。

なお、それでも実測と SPICE モデルによるシミュレーション結果が異なる場合もままありますので（モデルの正確性）、注意してください。

この Middlebrook 法の正しさを検証

ここまで LT1128 を用いて Middlebrook 法の適用方法について説明してきました。その正しさはひとつ前の TNJ-054 の図 14 と、本技術ノートの図 3 の結果から確認はできたところですが、実物の OP アンプ・モデルを使わずに理論的モデルを使って、もう少し厳密に正しさを検証してみましょう。

図 6 はここで考える理論的モデルです。OP アンプに相当するモデルは Laplace モデル

$$\text{laplace}(100000000/(s+1))$$

として、DC 増幅率 = 10^8 倍 (160dB) かつ -3dB 周波数 (ドミナント・ポール) = 0.159Hz にしてあります。理論的モデルということで出力インピーダンスはゼロです（ということで「 $Z_{OUT} \ll Z_{FB}$ 」という条件を実現しています）。そこに出力抵抗 R_O と負荷容量 C_1 が接続されています。

ダミーの信号源 V_1 がありますが、これは基本的な増幅回路の構成を示したかったために接続してあり、AC 0 と見るとおり、ループ・ゲインのシミュレーションとしては影響を与えるものではありません。

この図では電圧注入法でループ・ゲインを求めています。そのシミュレーション結果を図 7 に示します。DC 増幅率 160dB かつ帰還率が -20dB なのでループ・ゲインは 140dB、また -3dB 周波数 (ドミナント・ポール) は設定どおり 0.159 Hz になっています。

位相余裕は 39° となっています。

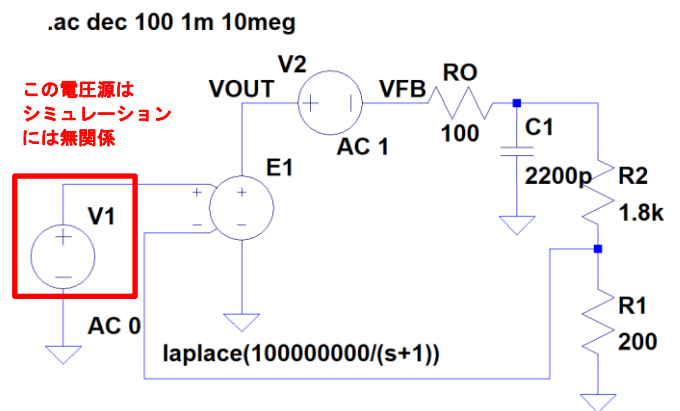


図 6. Middlebrook 法の正しさを検証するための理論的モデルのシミュレーション「基本」回路（電圧注入法）

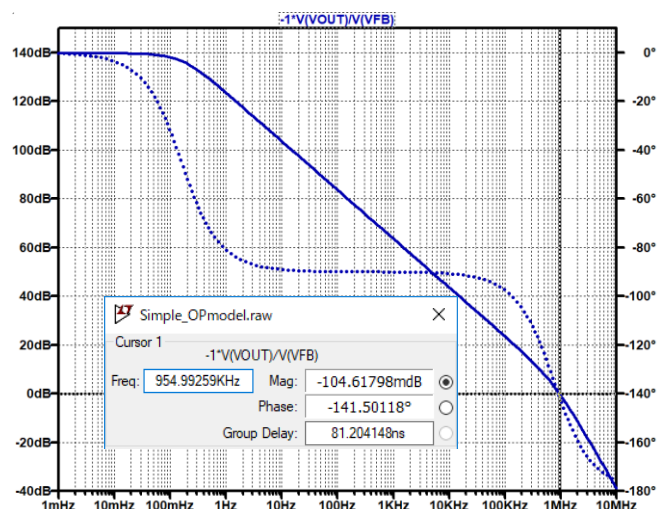


図 7. 図 6 のシミュレーション結果

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-055

理論的モデルに出力抵抗を付加して電圧源を不適切な位置に挿入してみる

図8は出力抵抗と帰還抵抗の一部をOPアンプ出力側にもっていき、「 $Z_{OUT} \ll Z_{FB}$ 」という関係を満足しないように修正してみた回路です。出力抵抗ROと、負荷抵抗C1、もともとR2としていた帰還抵抗1.8kΩの一部の500Ω（R3としました）をループ・ゲイン測定電圧注入信号源のOPアンプ出力側にもっていきました。

このシミュレーション結果を図9に示します。図7では位相余裕は39°でしたが、ここでは位相余裕は49°と求まり、異なる結果になっています。これまでみてきたとおり（誤差が生じる）だということが分かります。

出力抵抗を付加した理論的モデルに Middlebrook 法を適用してみる

図10に電圧注入法と電流注入法を併用した Middlebrook 法のシミュレーション回路を示します。無関係な電圧源は削除してあります。

この位相余裕は図7で得られた答えと、なんと…「ぴったり同じ」になっています。これで Middlebrook 法の適正さがご理解いただけたものかと考えます。

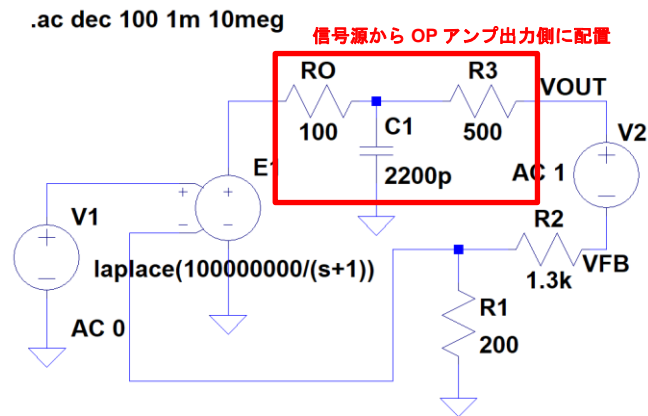


図8. 図6の回路を $Z_{OUT} \ll Z_{FB}$ という条件を満足しないように設定したシミュレーション回路

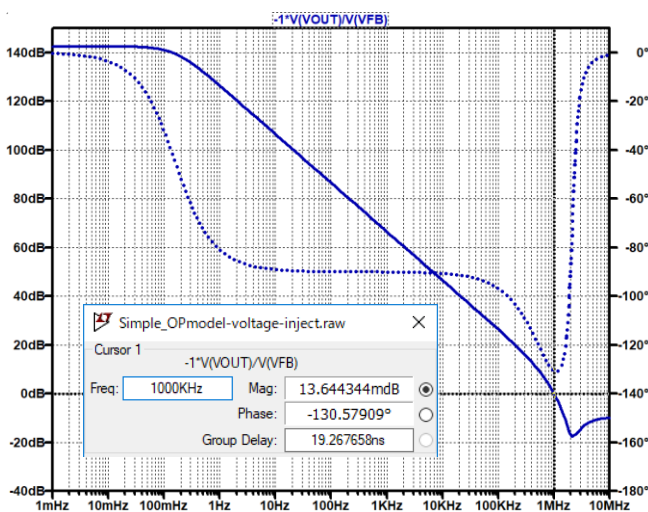


図9. 図8のシミュレーション結果

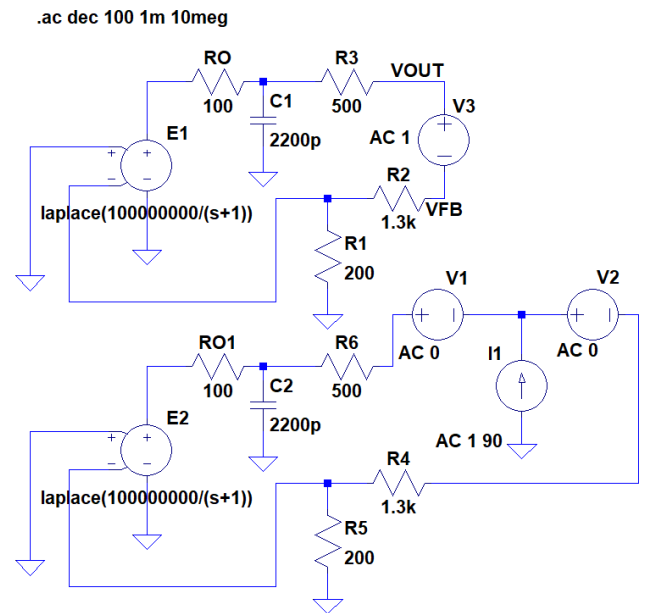


図10. 電圧注入法と電流注入法を併用したシミュレーション回路（無関係の電圧源は削除した）

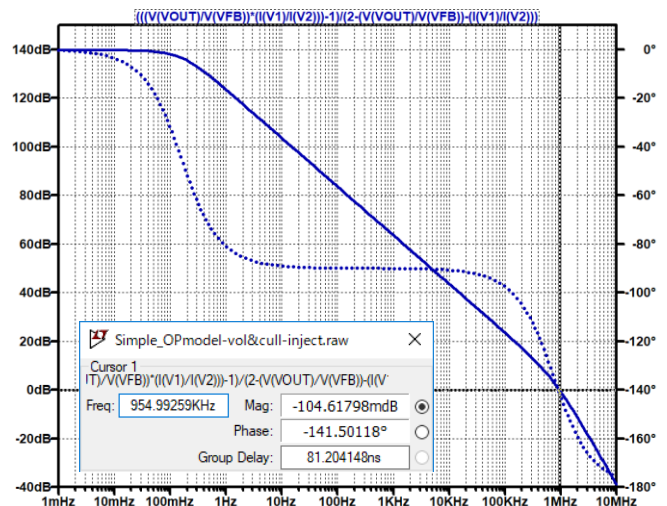


図11. 図10のシミュレーション結果。図7のシミュレーション結果と同じになっている

Middlebrook の論文での表現

「 $Z_{OUT} \ll Z_{FB}$ 」という関係を満足しない条件で、電圧注入法で誤差が出ることについて、Middlebrookは図12(a)のようなブロックで表現をしています[1]。電流注入法のみでの誤差も一緒に、図(b)に記載してみました。このブロック図はこれまで説明してきたOPアンプ回路の構成からすれば、少し違和感を感じるブロック図といえるのではないのでしょうか。

同図(a)からは電圧注入法から得られる（誤差を含んだ）ループ・ゲイン T_V として

$$T_V = \frac{v_y}{v_x} = \left(G_m + \frac{1}{Z_1}\right) Z_2 = \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) T + \frac{Z_2}{Z_1} \quad (1)$$

ここで G_m は増幅系のトランス・コンダクタンス、 T は真のループ・ゲインです。

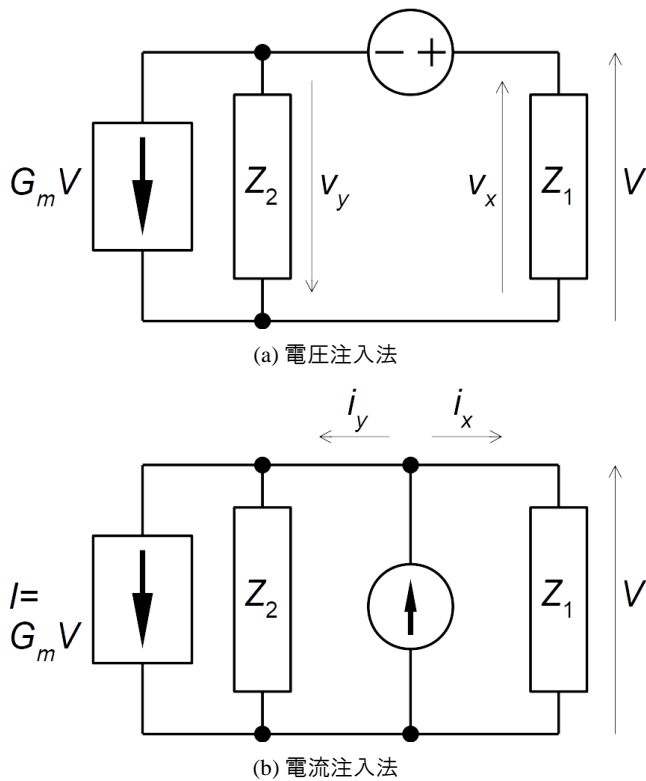


図 12. Middlebrook の示したブロック図

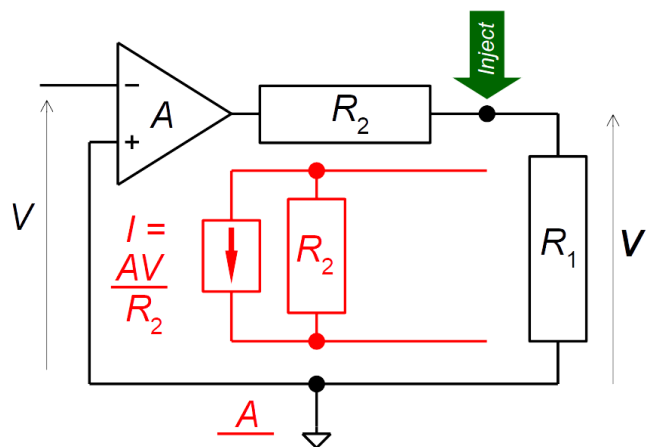


図 13. Middlebrook の示したブロック図を OP アンプの回路に変換してみる

同図(b)からは電流注入法から得られる（誤差を含んだ）ループ・ゲイン T_c として

$$T_c = \frac{i_y}{i_x} = \left(G_m + \frac{1}{Z_2}\right) Z_1 = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) T + \frac{Z_1}{Z_2} \quad (2)$$

等価変換してみる

電圧や電流を注入する部分は良しとしても、「トランス・コンダクタンス G_m 」が OP アンプ回路とつながらないと感じるひとも多いでしょう。

この回路を（ある一例として）OP アンプの回路に変換してみると、以下のように考えることができます。テブナンの定理とノートンの定理を比較して考えてみると、Middlebrook の示した図 12 の左側の電流源 I は、図 13 の赤の部分のように

$$I = \frac{AV}{R_2} \quad (3)$$

として等価変換できます。ここで A は OP アンプのオープン・ループ・ゲインです。 R_2 は OP アンプの出力インピーダンスなどです。これから Middlebrook の示した「トランス・コンダクタンス G_m 」は

$$G_m = \frac{A}{R_2} \quad (4)$$

なお図 13 では電圧注入法や電流注入法で信号注入するポイントを Inject という矢印で示しています。このように一般的な電圧帰還型 OP アンプも、Middlebrook の示した図 12 の構成に収容できるわけですね。

R. D. Middlebrook って頭いいのね…

しかし、思うわけですよ。「Dr. R. D. Middlebrook [8]って、頭いいのね…」と。このループ・ゲインの測定方法もそうですが、他にもいろいろと業績があるようですね。スイッチング電源の解析で多数の業績があるようです。Middlebrook の業績で最近ネットで見つけたのが「Extra element theorem [9]」（「余剰素子の定理」とでも訳せるでしょうか）というもので、回路網の計算を単純化できる手法だそうです。なお[9]の Wikipedia のページは日本語がないのですね（残念！）。

江崎博士を前にして（つづき）

ひとつまえの TNJ-054 で、江崎玲於奈博士の講演に参加したとお話しました。それはだいぶ昔の話で、30 歳代後半のことでした。そしてその内容は、「巨人の方の上に乗る、遠くを眺める」という話と、「知識を富に変換する」という含蓄のあるお言葉、そして「セレンディピティ (serendipity)」というお言葉でした。

「巨人の方の上に乗る、遠くを眺める」というお話については、拙書[10]の Column 5 でも紹介した話題でしたが、これをここでも少しご紹介しておきたいと思います。

その講演で江崎博士が「巨人の方の上に乗る、遠くを眺める」という話題を提示される前に、「ユニークさ」という振りネタをお話されていました。「ユニークなものを作る／作り出すというのは、自分の頭のなかだけで（他人からのインプットなしに）行っても限界がある。そこに必要なものは先人（先達：せんだつ）の知恵であり、その知恵に立脚したうえで、幾ばくかでも自分のユニークさをそのうえに積み上げるというプロセスが必要」というお話でした。

この「巨人の…」というのはアイザック・ニュートンの言葉だそうです。ニュートンは古典数学や古典物理学に関する多数の業績がありますが、この業績も先達の知恵・知見、つまりその「従来の業績」を全て理解したうえで、その「従来の業績」の上に立ち「遠くを眺めた」、つまり自分の業績を打ち立てたことだそう。この「巨人の肩の上」はなんと Wikipedia にも当該記事があります[11]。Wikipedia によると、原典はニュートン（1676 年の書簡）ではなく、12 世紀のフランスの哲学者の言葉のようです…。

「ニュートンのいう『巨人』とは誰のことかな」と調べていました。サーチしてもよくわかりませんが、天文学分野ではニコラウス・コペルニクス (Nicolaus Copernicus, 1473 年–1543 年)、ガリレオ・ガリレイ (Galileo Galilei, 1564 年–1642 年)、ヨハネス・ケプラー (Johannes Kepler, 1571 年–1630 年) あたりのようですね。当然ながら他の「巨人（先達）」もいたことでしょう… ([12]によると、恩師のアイザック・バローという大恩人もいたようです)。

それから時は経ち…

それから時は経ち…。2015年の春、電気・電子とは全く別の分野（といっても理系）の大学教授の方とお話する機会がありました（K先生、この記事を読まれることは絶対にはないと思いますが、その節は大変お世話になりました。心からお礼申し上げます）。その先生はおっしゃいました。「世の中の仕事や研究の9割はつまらない作業である」と。「残り1割で自分の色を出したり、興味を持てるとか、成果の出せる仕事や研究をするのだ」と。

この先生は現在ではその大学での副学長になっていらっしゃる方で、お会いした当時は学科長でしたが、私も「深みのあることを言う先生だな」と、そのお話を伺っていました。

アイザック・ニュートン、江崎博士とこの先生は、広義においては実は同じことを言っています（と、私は感じます）。

参考文献

- [1] R. D. Middlebrook; Measurement of Loop Gain in Feedback Systems, International Journal of Electronics, Vol. 38, Issue 4, pp. 485-512, 1975.
- [2] 柴田 肇; トランジスタの料理法, 2007年, CQ出版社
- [3] Sergio Franco; Loop gain measurements Sep. 13 2014, EDN Network, <https://www.edn.com/electronics-blogs/analog-bytes/4434609/Loop-gain-measurements->
- [4] LT6375 $\pm 5\text{mA}$ Howland Current Source, Analog Devices, <https://www.analog.com/en/design-center/reference-designs/circuit-collections/lt6375-5ma-howland-current-source.html#cc-overview>
- [5] James Bryant; Current-Output Circuit Techniques Add Versatility to Your Analog Toolbox, Analog Dialogue, Vol. 48, No. 4, Apr. 2014, Analog Devices, <https://www.analog.com/media/en/analog-dialogue/volume-48/number-2/articles/current-output-circuit-techniques-add-versatility.pdf>
- [6] 周波数特性分析器技術解説集, NF回路設計設計ブロック
- [7] 周波数特性分析器, NF回路設計設計ブロック, <http://www.nfcorp.co.jp/pro/mi/fra/index.html>
- [8] R. D. Middlebrook, https://en.wikipedia.org/wiki/R._D._Middlebrook
- [9] Extra element theorem, https://en.wikipedia.org/wiki/Extra_element_theorem
- [10] 石井 聡; 電子回路設計のための電気／無線数学, CQ出版社
- [11] 巨人の肩の上, Wikipedia, <https://ja.wikipedia.org/wiki/巨人の肩の上>
- [12] アイザック・ニュートン, Wikipedia, <https://ja.wikipedia.org/wiki/アイザック・ニュートン>