

LTspice でサレン・キー型フィルタ（第4回）「因数分解された2次式が1段の2次LPFに変換できるしくみを考える（後編）」

著者：石井聡

はじめに

書きはじめてみると、本当に何冊続くか分からない…、なんと、先の見えない展開になってきています。ということで、サレン・キー型LPFに関するフィルタ・シリーズの4冊目です。

フィルタ・シリーズのここまで、TNJ-044とTNJ-045では、サレン・キー型LPFとRLC型2次LPFが等価であることを説明し、その伝達関数の Q 値と極について、また極が複素数になったときに複素数平面上で極がどのように表されるか、そして昔に学校で習ったか教科書で見た、実回路とは到底結びつきそうにもない、「システム（回路）の伝達関数多項式」が現実の回路とどのようにつながるかについてご説明いたしました。

1次RCフィルタと2次RLCフィルタを、バッファを通して接続していくことによって、その伝達関数が「理解不能だった伝達関数多項式となるのだ」ということがご理解いただけたのではないかと思います。なお分母が多項式になる例だけしか示していませんが、分子が多項式になるものは「ゼロ（零）」という、「極」とは異なる振る舞いをするものです。この件については、稿をあらためてご説明したいと思います。

また前回の技術ノートTNJ-046では、 $Q > 0.5$ の条件のときの分母多項式をイコール・ゼロとした解（これを「根」と呼びます）、つまり極が複素数のとき、それが複素数平面上でベクトルとして表され、極と観測角周波数との間のベクトルが動いていく状態が、伝達関数の周波数特性に関係してくると説明してきました。

ここまで分かったところで、今回の技術ノートでは、このベクトルがフィルタ特性としてどのように構成されているかについて、具体的にグラフで検討してみます。ここまでの説明の全てが確かにつながっていることに気がつかれると思います。

この技術ノートの目的は…

ひとつ前のTNJ-046とこのTNJ-047でご紹介する内容のゴールを最初に示しておきます（TNJ-046の一部再掲）。

- 任意のカーブをもつ分母多項式を因数分解していくと、1次式と2次式に分解できる
- この2次式の部分は、RLC型とバッファや、サレン・キー型の2次LPF1段で、1次式の部分はRC型1次LPF1段で実現できる
- これらのフィルタをバッファを通してカスケード（従属）接続していけば、その任意のカーブの多項式の特性をもつフィルタが実現できる
- そこでこの技術ノートでは、2次式の根である、「極」の複素数平面上での配置と、信号伝達特性がどのように関係しているかを知る

● TNJ-046で説明した、実際のLPFを構成するパラメータ Q と ω_0 を極から得て

● パラメータ Q と ω_0 さえ分かれば、RLC型やサレン・キー型の2次LPFを設計できる（TNJ-044で示した関係により。これはまたTNJ-048で詳しく見てみます）

掛け算、足し算といえど電卓だが、実務電卓をなめてはいけない！

このフィルタ・シリーズ技術ノート全体の底流を流れるものが「2次LPFの伝達関数をそれぞれ掛け算したもの、理解不能だった伝達関数多項式となる」ということです（位相特性は足し算になります）。これはひとつ前のTNJ-046でもお話しし、ここでは図1として「人生の伝達関数は因数項ごとのかけ算である」なんて格言をご紹介しました。

「掛け算・足し算」といえば、電卓を思い浮かべます。しかし「電卓」だなんて、ふと考えれば面白い用語です。「電（でん）」「卓（たく）」ですよ…（笑）。「電動で動く座卓ですか？」「全自動マージャン卓ですか？」だなんてことを言う人はいませんよ…（笑）。「電子式卓上計算機」が正式表記ですが、日本工業規格でもJIS B0117で、用語「電卓」として標準化しているのですね！[1]。

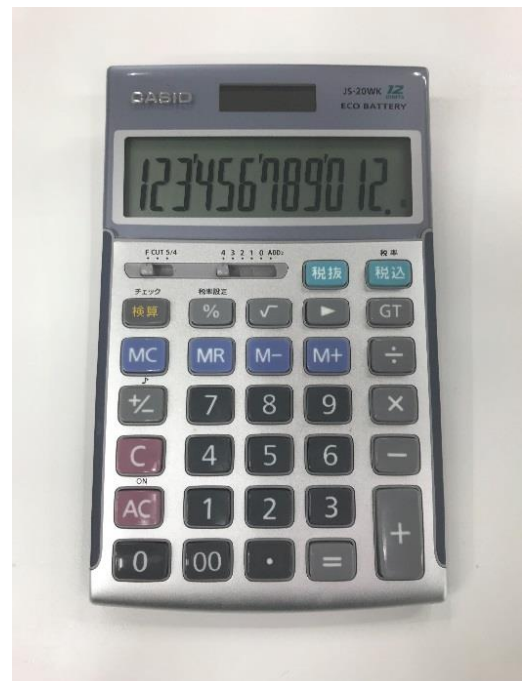


図1. 「掛け算・足し算」といえば実用電卓だが…技術者はその機能をなめてはいけない

アナログ・デバイス株式会社は、提供する情報が正確で信頼できるものであることを期していますが、その情報の利用に関して、あるいは利用によって生じる第三者の特許やその他の権利の侵害に関して一切の責任を負いません。また、アナログ・デバイス社の特許または特許の権利の使用を明示的または暗示的に許諾するものでもありません。仕様は、予告なく変更される場合があります。本紙記載の商標および登録商標は、それぞれの所有者の財産です。
©2019 Analog Devices, Inc. All rights reserved.

Rev. 0

アナログ・デバイス株式会社

本 社 / 〒105-6891 東京都港区海岸 1-16-1 ニューピア竹芝サウスタワービル
電話 03 (5402) 8200
大阪営業所 / 〒532-0003 大阪府大阪市淀川区宮原 3-5-36 新大阪トラストタワー
電話 06 (6350) 6868

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-047

実用電卓をなめてはいけない

私たち技術者は関数電卓を用いる人がほとんどでしょう。しかし一般の人は図1のような実用電卓を使うものと思います。経理の人とか、すごい勢いで電卓を打っているのを見ることがありますよね（あれも驚異的です）。そういう人向けに一般社団法人日本電卓技能検定協会で、電卓技能検定[2]というものを実施されています。

さて、図1の実用電卓とはある試験の受験用に私が購入したものです。カシオの12桁電卓ですが、ネットで十分に吟味して購入しました。税理士試験や簿記検定などでもパフォーマンスを発揮できるように、入念に仕様決定・設計されたものようです。たしかにとっても使い易い！キーは打ちやすいし、3キー・ロールオーバーで高速入力にも対応（って、私は無理ですが…）。

「実用電卓って、単純な四則演算だけだろう」と（私も含めて）思っている人が多いと思いますが、多くの実用電卓は

- [×] や [÷] の2度押しで係数計算ができる
- 計算結果の1/x（逆数）の計算を [A+B=÷÷1=] で計算できる
- $(1+x)^N$ （ただしxは利回り、Nは正の整数かつ10程度まで）の複利計算を税率ボタンで計算できる
- 税抜ボタンで $1/(1+x)^N$ （ただしxは利回り、Nは正の整数かつ10程度まで）の現在価値を計算できる
- 今更知ったが [GT] ボタン（Grand Total）で各計算結果のΣを得られる
- メモリ機能も（当然ながら）上手く使えば便利に計算できる

などいろいろな機能（キー手順はメーカーによって異なります）をもっており、これらを組み合わせることで結構複雑な計算もこなせます。

建築士試験（製図）も前は関数電卓持込可だったようですが、現在では実用電卓のみになっています。

2次LPFの伝達関数のうちひとつの極の1次伝達関数をプロットしてみる

前回のTNJ-046の式(19)の振幅伝達特性と式(20)の位相特性を再掲します。式(19)の伝達関数 $H_-(s)$ の振幅伝達特性は

$$|H_-(s)| = \frac{\omega_0}{|s - s_{p-}|} = \frac{\omega_0}{|D_-(s)|} \quad (1)$$

おなじく式(20)の伝達関数 $H_-(s)$ の位相特性は

$$\begin{aligned} \arg[H_-(s)] &= \frac{1}{\arg(s - s_{p-})} = \frac{1}{\arg[D_-(s)]} \\ &= -\arg(s - s_{p-}) = -\arg[D_-(s)] \end{aligned} \quad (2)$$

ここで $Q = 1, 2, 4$ の3条件で計算してプロットしてみましょう。極 s_{p-} は

$$s_{p-} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} - \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2}}{2} \quad (3)$$

でした。 $\omega_0 = 1$ だと正規化して、またルート内を正にして（二項をひっくり返して）虚数単位をルートの外に出すと

$$s_{p-} \Big|_{\omega_0=1} = \frac{-\frac{1}{Q} - j\sqrt{4 - \left(\frac{1}{Q}\right)^2}}{2} \quad (4)$$

Q	Re (実数部)	Im (虚数部)
1	-1/2	$-\sqrt{3}/2 = -0.866$
2	-1/4	$-\sqrt{4 - \frac{1}{4}}/2 = -0.968$
4	-1/8	$-\sqrt{4 - \frac{1}{16}}/2 = -0.992$

表1. $Q = 1, 2, 4$ のときの s_{p-} の実数部と虚数部（ただし $\omega_0 = 1$ としている）

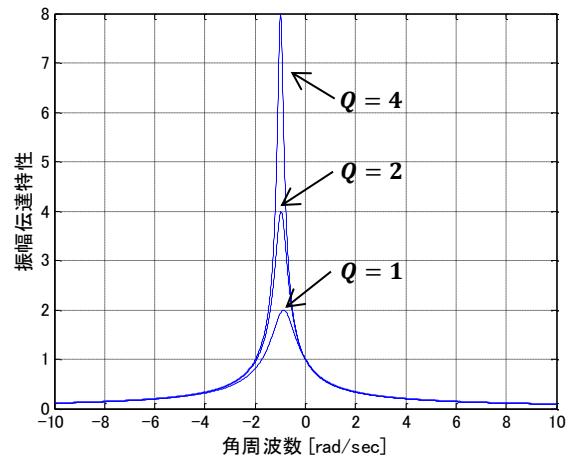


図2. 極 s_{p-} についての式(1)の振幅伝達特性

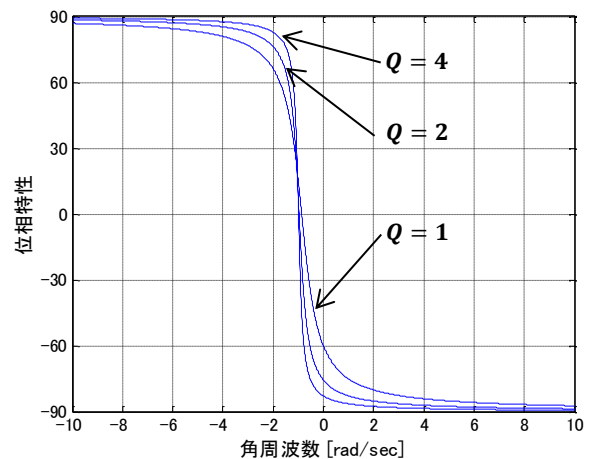


図3. 極 s_{p-} についての式(2)の位相特性

これで $Q = 1, 2, 4$ の3条件で計算してみると表1のようになります。この条件でそれぞれ観測角周波数を変化させてプロットしてみます。

ここは周波数 f で考えるほうが理解しやすいかもしれませんが、ここまで角周波数として $\omega_0 = 1 \text{ rad/sec}$ と正規化してまいりましたので、角周波数 $\omega = \pm 10 \text{ rad/sec}$ （周波数なら $f = \pm 10/2\pi \text{ Hz}$ ）の範囲で計算します。式(1)の振幅伝達特性の計算結果を図2に、式(2)の位相特性の計算結果を図3に示します。

この図2をみてみると、1次式にした結果のピーク位置（角周波数）は、 Q ごとに異なっていることにも気がつきます。ピークは $|s| = \text{Im}(s_{p-})$ になるところに立つからなのですね。

しかしこれでは「なんだか腑に落ちないプロットだな」と感じるかと思います。その説明を以降でしていきたいと思いますが、もう暫くガマンしてお付き合いください…。

もうひとつの極による伝達関数もプロットしてみる

つづいてもうひとつの極である s_{p+} についても同じように計算してみます。 s_{p+} は

$$s_{p+} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2}}{2} \tag{5}$$

です。ベクトルの長さは

$$|\overline{D_+}(s)| = |s - s_{p+}| \tag{6}$$

となります。ここで振幅伝達特性

$$|H_+(s)| = \frac{\omega_0}{|s - s_{p+}|} = \frac{\omega_0}{|\overline{D_+}(s)|} \tag{7}$$

を図4に、位相特性

$$\arg[H_+(s)] = -\arg[\overline{D_+}(s)] \tag{8}$$

を図5にプロットしてみます。ここでプロットする角周波数範囲は図2、図3と同じです。こんどはプラスの角周波数側にピークが立っていますね。しかし「これもまた、なんだか腑に落ちないプロットだな」と感じるかと思います。もう暫く…、もう暫くガマンしてお付き合いください…（すいません）。

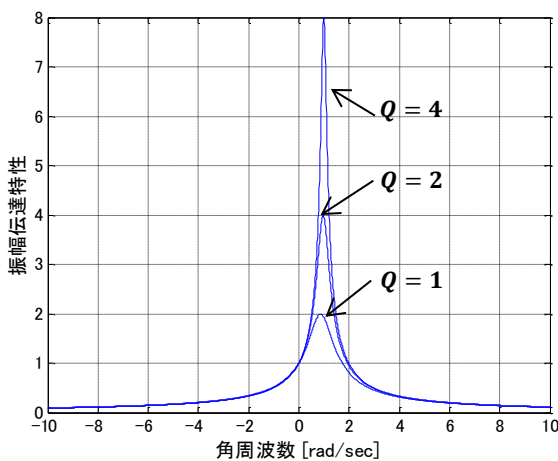


図4. 極 s_{p+} についての式(7)の振幅伝達特性

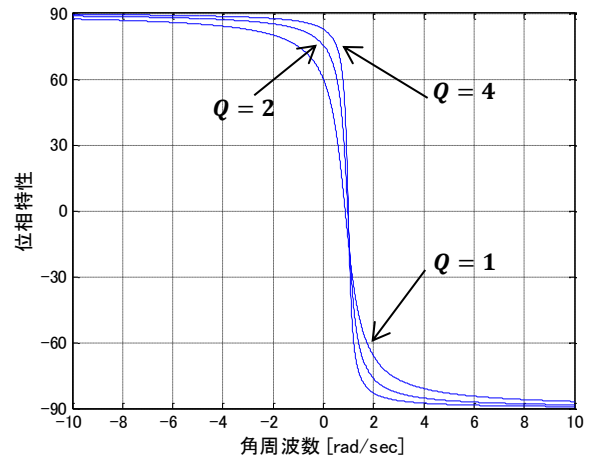


図5. 極 s_{p+} についての式(8)の位相特性

2次LPFの伝達関数をそれぞれの極の1次伝達関数の従属接続：「掛け算」として考える

図6（TNJ-046の図4再掲）のとおりに、 $H(s)$ は $H_+(s)$ と $H_-(s)$ とのカスケード（従属）接続になりますので、以下のようにそれぞれが掛け算される関係になります〔TNJ-046の式(16)再掲〕。これは前回のTNJ-046図1の格言と同じです（笑）。

$$H(s) = H_+(s) \cdot H_-(s) = \frac{\omega_0}{s - s_{p+}} \cdot \frac{\omega_0}{s - s_{p-}} = \frac{\omega_0}{\overline{D_+}(s)} \cdot \frac{\omega_0}{\overline{D_-}(s)} \tag{9}$$

$H(s)$ の振幅伝達特性は

$$|H(s)| = |H_+(s)| \cdot |H_-(s)| = \frac{\omega_0^2}{|\overline{D_+}(s)| \cdot |\overline{D_-}(s)|} \tag{10}$$

そして位相特性は「足し算」となり

$$\arg[H(s)] = \arg[H_+(s)] + \arg[H_-(s)] = -\arg[\overline{D_+}(s)] - \arg[\overline{D_-}(s)] \tag{11}$$

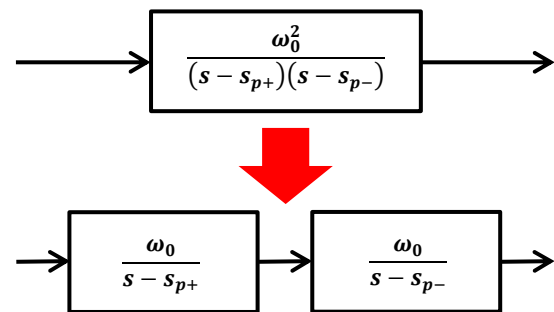


図6. ふたつの極をもつ2次伝達関数をふたつの1次伝達関数の従属接続に分解する（TNJ-046の図4再掲）

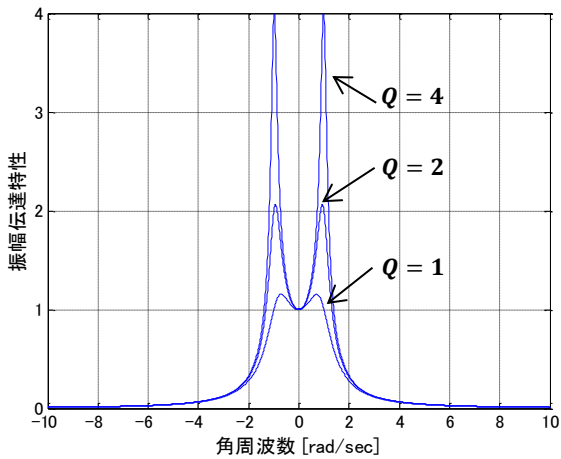


図 7. 全体の伝達関数の式(10)で表される振幅伝達特性

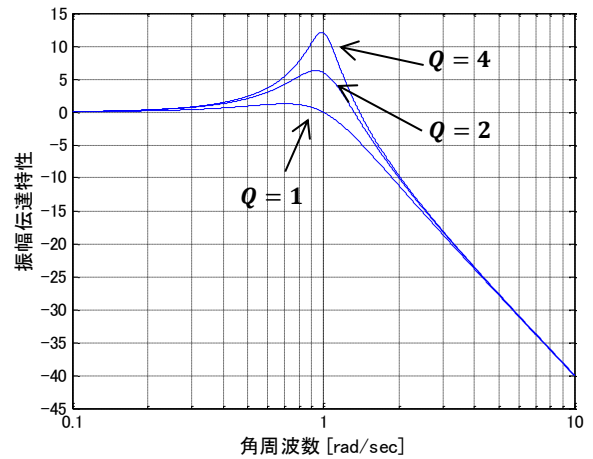


図 9. 全体の伝達関数の式(10)で表される振幅伝達特性 (図 7 を作画しなおしたもの。横軸は対数軸表記、縦軸は dB 表記)

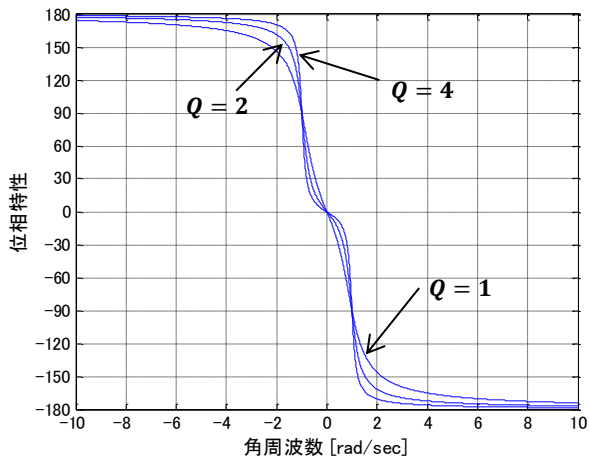


図 8. 全体の伝達関数の式(11)で表される位相特性

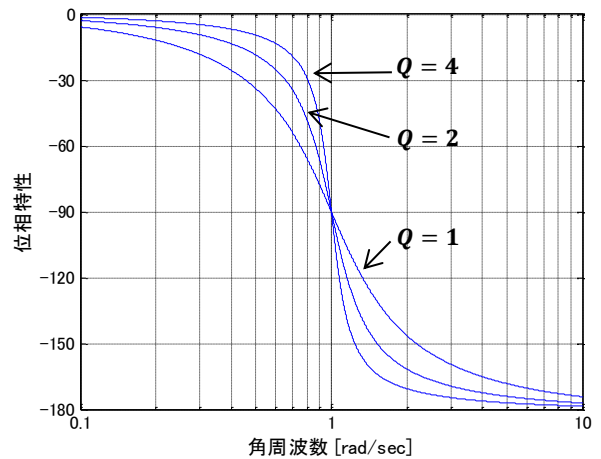


図 10. 全体の伝達関数の式(11)で表される位相特性 (図 8 を作画しなおしたもの。横軸は対数軸表記)

グラフを作画して全体の伝達関数の特性をみてる

先の式(10)と式(11)で示した関係を用いて、これまでの図 2～図 5 の計算結果を、

- ① 振幅伝達特性については、ふたつの 1 次伝達関数の絶対値 (大きさ) を掛け算 [式(10)の考え方で] して図 7 に
- ② 位相特性については、ふたつの 1 次伝達関数の位相特性を足し算 [式(11)の考え方で] して図 8 に

それぞれプロットしてみます。

ここでも式だけだと実感が湧かないと思いますので、どんどんグラフ上にプロットしていきましょう。

しかし「これでもまだ腑に落ちないプロットだな」と感じるかと思えます (汗)。そこで横軸をプラスの周波数のみにして、また対数軸表記にしてみます。振幅伝達特性は縦軸を dB に変更しました。これを図 9 と図 10 に示します。

こうすると「おお！」

おお! こうすると、フィルタ・シリーズ最初の TNJ-044 の図 5 の RLC 型 2 次 LPF の振幅特性 (図 11 として再掲) と図 6 (図 12 として再掲) と全く同じカーブになっていることが分かります。図 11、図 12 では横軸の単位は「周波数」[Hz]、図 9 と図 10 の横軸の単位は「角周波数」[rad/sec]ではありますが。

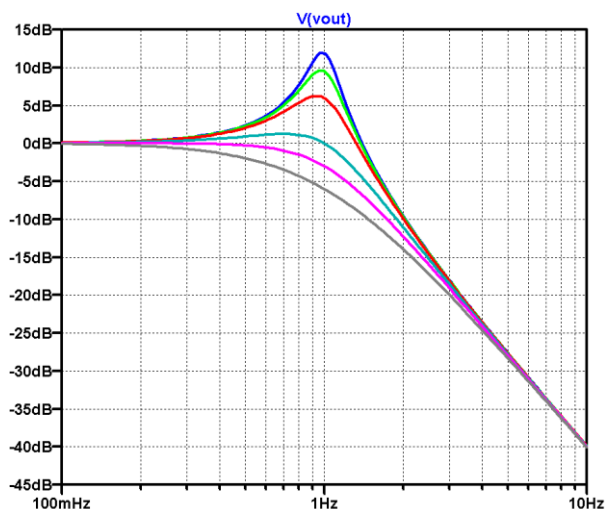
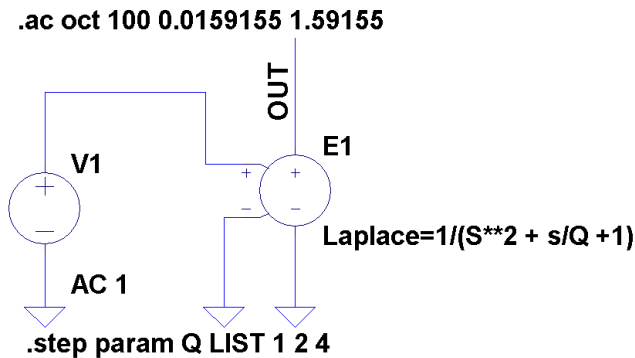
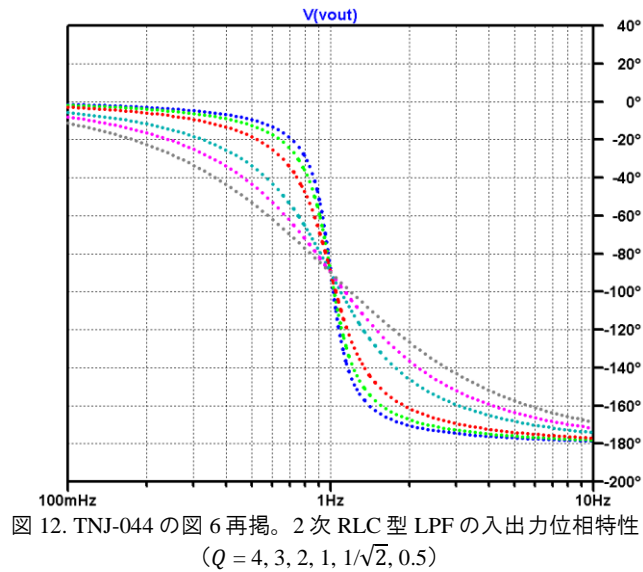


図 11. TNJ-044 の図 5 再掲。2 次 RLC 型 LPF の振幅伝達特性 ($Q = 4, 3, 2, 1, 1/\sqrt{2}, 0.5$)



ここまでの考え方を再検証してみる

ここまで色々としてきた考え方を再検証してみましょう。

LTspice でラプラス・モデルを構成してみた

LTspice でも、Laplace モデルを使って図 13 のような 2 次伝達関数を表す回路を作ってみました。LTspice では虚数（複素数）は使えないようで、そのため図 6 の下側の 1 次式の縦続接続モデルではなく、2 次式としてのモデルで表しています。

結果を図 14 に示します。図 11 や図 12 と異なり、 $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ がカットオフ周波数となるため、横軸（周波数軸）は図 10 までと同じ条件になりますが、これまでの全てが符合していることが分かります。

直流で考えると伝達関数 = 1 になる（ベクトル図で考える）

LPF であれば、周波数 $f = 0 \text{ Hz}$ つまり直流 ($s = 0$) のときには、伝達関数 $H(0) = 1$ になります。これは直感的にも理解できるものです。この一番基本的な視点がここまでの説明で成り立っているかを検証してみましょう。

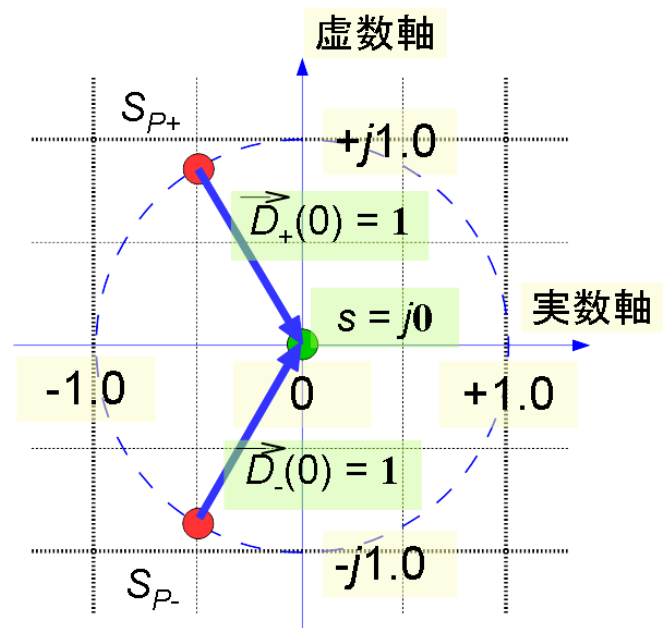
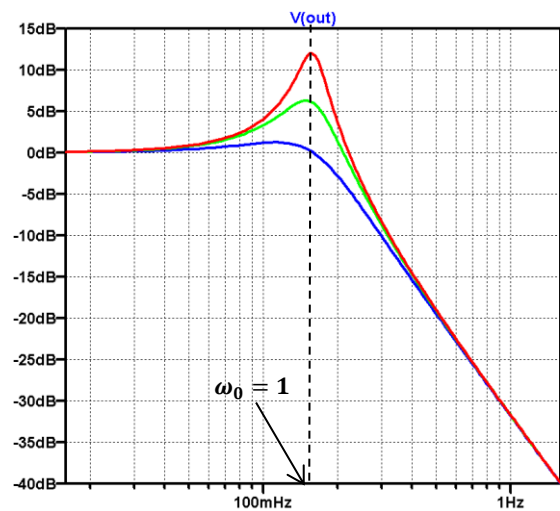
周波数 $f = 0 \text{ Hz}$ では、 $s = j0$ になります。そうすると前回の TNJ-046 の図 5 から図 7 を書き直した図 15 において、 $s = j0$ は虚数軸の中央、つまり直交座標の交点になります。 s_{p+} と s_{p-} の位置からのベクトル $\vec{D}_+(j0)$ と $\vec{D}_-(j0)$ は図中の青矢印となります。また s_{p+} と s_{p-} の位置は、中央から半径 1 の円上（ただしここでは $\omega_0 = 1$ としているため）にありますので、ベクトルの長さは

$$|\vec{D}_+(j0)| = |\vec{D}_-(j0)| = 1 \quad (12)$$

これから

$$|H(j0)| = |H_+(j0)| \cdot |H_-(j0)| = 1 \quad (13)$$

となっていることが分かります。



直流で考えると伝達関数 = 1 になる (式で考える)

また式(1)や式(7)で、 $s = j0$ での絶対値を考えると

$$|H_+(j0)| = \left| \frac{\omega_0}{j0 - s_{p+}} \right| = \frac{\omega_0}{|-s_{p+}|} = \frac{\omega_0}{\omega_0} = 1 \quad (14)$$

$$|H_-(j0)| = \left| \frac{\omega_0}{j0 - s_{p-}} \right| = \frac{\omega_0}{|-s_{p-}|} = \frac{\omega_0}{\omega_0} = 1 \quad (15)$$

$$|H(j0)| = |H_+(j0)| \cdot |H_-(j0)| = 1 \quad (16)$$

これから「直流での伝達関数、つまり振幅伝達特性は1」という、LPFの「至極あたりまえ」と考えられる事実を、図や式で確認することができたわけです。また伝達関数として、正しく直流で伝達関数 = 1 になるようにするには、**2次式を ω_0^2 倍してゲインをスケールリングする必要がある**ということも注意が必要です。これはTNJ-046の式(3)

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad (17)$$

の分子に定数 ω_0^2 があることや、これまでの説明からも分かります。**【右上に続く】**

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + b_qs + c_q)(s^2 + b_{q-1}s + c_{q-1}) \cdots (s^2 + b_0s + c_0)(s + d_r)(s + d_{r-1}) \cdots (s + d_0)} \quad (19)$$

として、それぞれの因数まで完全に分解される前に「1次式となる部分」と「2次式になる部分」ができることとなります(添え字の q, r は単なるそれぞれのインデックス)。この1次式となる部分はRCによる1次RCフィルタ(とバッファ)で構成できることとなります。

2次式の部分をアクティブ・フィルタで実現する

式(19)で2次式になる部分は

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2 + bs + c} &= \frac{1}{s^2 - (2Re)s + (Re^2 + Im^2)} \\ &= \frac{1}{(s - Re - jIm)(s - Re + jIm)} \end{aligned} \quad (20)$$

として「根が共役複素数となるふたつの1次式」に因数分解されますが、この2次式の部分はRLC型LPF回路で構成できることとなります。このRLC型LPFをサレン・キー型などのアクティブ・フィルタ回路で

$$\omega_0 = |s_{p\pm}| \quad (21)$$

ただし

$$s_{p\pm} = Re \pm jIm \quad (22)$$

また

$$Q = -\frac{\omega_0}{2Re} \quad (23)$$

をパラメータとして組めば、RLC型LPFの特性を等価的に実現できます。ただし先に示したように、直流で伝達関数 = 1 になるように2次式を ω_0^2 倍して、式中のゲインをスケールリングする必要があります。

このふたつのパラメータ ω_0 と Q と、実際の回路定数との関係は、TNJ-044の式(1)、式(3)、式(4)から求めることができます。次のTNJ-048では、このなりたちを詳しく確認してみます。

まとめにかえて

任意の周波数特性は1次式と2次式に分解される

任意の周波数特性の伝達関数の式

$$H(s) = \frac{1}{s^n + A_{n-1}s^{n-1} + \cdots + A_1s + A_0} \quad (18)$$

が与えられたとします(添え字の n は多項式の次数です)。ただしここでは、分母にのみ多項式があるものに限定します。このような分母多項式で、任意のカーブを表すことができます。このカーブが「LPFのフィルタ特性」に適用されるということなのです。

これを因数分解していくと、これまでのフィルタ・シリーズ技術ノートの説明のように

1次フィルタ(バッファを通したもの)と2次フィルタをカスケード(従属)に接続していけば、結果的に式(19)、もとをたどれば式(18)の伝達関数特性をもつフィルタ回路を組めることになるわけですね。

なお任意のフィルタ特性を実現する場合で因数分解するには、解析的に(数式で)根を得るのではなく、数値計算で計算することが実際です。なおバタワース特性やチェビシェフ特性では解析的に(数式で)根を得られます。

回路解析において非常に基本かつ重要なポイント

ここまでの説明で用いられた、回路解析で使える非常に基本かつ重要なポイントをあらためて説明しておきます。図16のように

- 各ブロック間でインピーダンスの結合が無視できる(ブロック間はバッファを介して接続した)場合に
- 全体の振幅伝達特性はそれぞれの振幅伝達特性の掛け算
- 全体の位相特性はそれぞれの位相特性の足し算
- 数式として考えれば、1次フィルタは1次式、2次フィルタは2次式となり、それらが乗算されたものとして全体の伝達関数が得られる

ということです。繰り返しますが、これは回路解析(とくにフィルタ解析)において非常に基本かつ重要なポイントです。

LC パッシブ・フィルタの場合は

このフィルタ・シリーズ技術ノートではお話ししていませんが、同じフィルタでも LC パッシブ・フィルタ（これまで説明したようなバッファを用いないもの）の場合は、回路構成方法の考え方が異なります。

ここまでの説明のように、1 次式、2 次式と分解していくというより、RLC の直並列接続、つまり「ラダー（はしご）回路」として、「連分数展開」という考え方をを用いて素子定数を得ていきます。

最後に次回予告

ようやく「分母多項式で表された任意のカーブのフィルタ特性をサレン・キー型 LPF に変換させるためには」という議論の、非常に俯瞰的な話題について、4 冊の技術ノートを使って説明できました。

次の技術ノートではサレン・キー型 LPF 自体について、その素子定数とパラメータ Q と ω_0 の関係について、なりたちを深く考えてみたいと思います。

実はそろそろこの技術ノート・シリーズの最初である TNJ-044 にお話しした、「とある日のとある方との、とあるメールのやりとりで、横道の興味が湧いてきました」ということもお話ししていきたいと考えてはいますが、まだそこには到達できそうもありません…。実は次々回の TNJ-048 でそれを狙ってはいるのですが…。

それこそ、何冊続くか分からない…。なんという、先の見えない（いいかげんな？）サレン・キー型 LPF 技術ノート・シリーズです…。

参考文献

[1] <https://ja.wikipedia.org/wiki/電卓>

[2] <http://dentaku.or.jp/500/index.html>

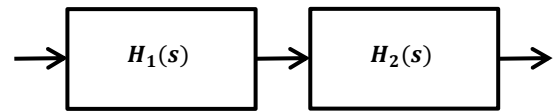


図 16. 全体の伝達関数で振幅は掛け算、位相は足し算になる