

**LTspice でサレン・キー型フィルタ（第3回）「因数分解された2次式が
1段の2次LPFに変換できるしくみを考える（前編）」**

著者：石井 聡

はじめに

何冊続くか分からない…、なんという、先の見えない（いいかげんな？）サレン・キー型LPFシリーズ技術ノートの3冊目です（まあ、とはいえ適当な回数で止める予定ですが…）。

フィルタ・シリーズのここまで、TNJ-044とTNJ-045では、サレン・キー型LPFとRLC型2次LPFが等価であることを説明し、その伝達関数の Q 値そして極について、また極が複素数になったときに複素数平面上でどのように表されるか、さらに昔に学校で習ったとか、教科書で見た、実回路とは到底結びつきそうにもない、「システム（回路）の伝達関数多項式」が現実の回路とどのようにつながるかについてご説明いたしました。

1次RCフィルタと2次RLCフィルタを、バッファを通して接続していく（もしくは等価なアクティブ・フィルタを利用する）ことによって、その伝達関数が「理解不能だった伝達関数多項式になるのだ」ということがご理解いただけたのではないかと思います。なお分母が多項式になる例だけしか示していませんが、分子が多項式になるものは「ゼロ（零）」という、「極」とは異なる振る舞いをするものです。このことについては、稿をあらためてご説明したいと思います。

さて、今回の技術ノートTNJ-046では、 $Q > 0.5$ の条件のときの分母多項式をイコール・ゼロとした解（これを「根」と呼びます）、つまり極が複素数のとき、それを複素数平面上で表すとどうなるかをより深く考えていきます。そしてそれが、「フィルタ特性としてベクトルで考えられる」というあたりまでお話しします。次のTNJ-047では、極とフィルタ特性がどのように関連づけられているかについて、ベクトルとグラフで具体的に検討してみます。

この技術ノートの目的は…

このTNJ-046と次のTNJ-047でご紹介する内容のゴールを最初に示しておきます。

- 任意のカーブをもつ分母多項式を因数分解していくと、1次式と2次式に分解できる
- この2次式の部分は、RLC型とバッファや、サレン・キー型の2次LPF1段で、1次式の部分はRC型1次LPF1段で実現できる
- これらのフィルタをバッファを通してカスケード（従属）接続していけば、その任意のカーブの多項式の特性をもつフィルタが実現できる
- そこでこの技術ノートでは、2次式の根である、「極」の複素数平面上での配置と、信号伝達特性がどのように関係しているかを知り
- 実際のLPFを構成するパラメータ Q と ω_0 を、極からどうやって計算するかを知る（これを先に説明します）

- パラメータ Q と ω_0 さえ分かれば、RLC型やサレン・キー型の2次LPFを設計できる（TNJ-044で示した関係により。これはまたTNJ-048で詳しく見てみます）

フィルタに関する書籍を写真でご紹介しようと思いましたが…

今回の最初の写真は、アクティブ・フィルタに関する書籍をご紹介しようと思っていました。それは参考文献[1]に挙げる絶版本なのですが、それではつまらないと思い、手持ちの写真からいろいろ探しておりました。このフィルタ・シリーズ技術ノート全体の底流を流れることが「1次/2次LPFの伝達関数をそれぞれ掛け算したものが、理解不能だった伝達関数多項式となるのだ…」であり、言い方を換えると「それで任意のフィルタ・カーブを実現できる」ということです。そこで図1の写真を見てピピッときたのでした。

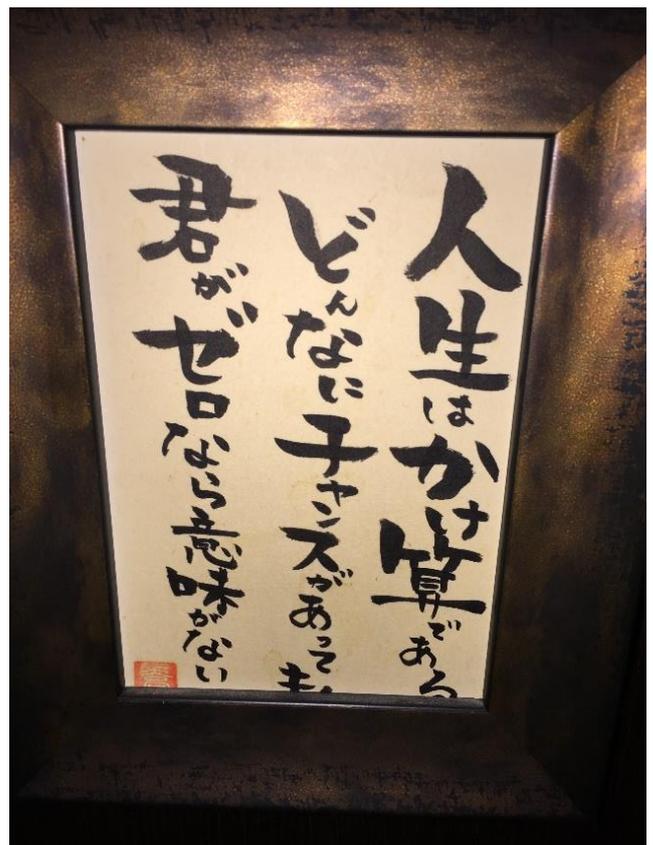


図1. 人生の伝達関数は因数項ごとのかけ算である

アナログ・デバイセズ株式会社は、提供する情報が正確で信頼できるものであることを期していますが、その情報の利用に関して、あるいは利用によって生じる第三者の特許やその他の権利の侵害に関して一切の責任を負いません。また、アナログ・デバイセズ社の特許または特許の権利の使用を明示的または暗示的に許諾するものでもありません。仕様は、予告なく変更される場合があります。本紙記載の商標および登録商標は、それぞれの所有者の財産です。
©2018 Analog Devices, Inc. All rights reserved.

Rev. 0

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-046

これは都内のどこかの飲み屋のトイレのドア（の内側）に張ってあった格言です。トイレに入ったときにあまりに印象的な格言だったので、撮影してしまいました（笑）。まさに「人生も伝達関数」という感じでしょうか（笑）。

これまでのポイントをおさらい

これまでの技術ノート TNJ-044、TNJ-045 のうち、TNJ-044 の RLC 型 2 次 LPF 回路（図 2 として再掲しました）において、

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1)$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2)$$

とすれば、その伝達関数は

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad (3)$$

で表せると説明しました。これをこの伝達関数 $H(s)$ の「極」 s_{p+} と s_{p-} （あわせて $s_{p\pm}$ とも表します）で表すと

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} = \frac{\omega_0^2}{(s - s_{p+})(s - s_{p-})} \quad (4)$$

ここで s_{p+} と s_{p-} は

$$s_{p\pm} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2}}{2} \quad (5)$$

ここで $Q > 0.5$ だと、ルートの中がマイナスになりますので、ルートの項は「虚数」となります。そうすると s_{p+} と s_{p-} は共役複素数となるふたつの根（極）になります。このときが多岐な特性のアクティブ・フィルタを実現できる条件になります。この条件のことを以降で詳しくみてみましょう。

複素数平面での極の配置を考える

式(5)から、極の大きさ $|s_{p\pm}|$ （絶対値ノルム）を計算すると、

$$|s_{p\pm}| = \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 + \left[4\omega_0^2 - \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2\right]}}{2} = \frac{\sqrt{4\omega_0^2}}{2} = \omega_0 \quad (6)$$

またこれも先の技術ノート TNJ-044 の式(21)に示しましたが、この極を

$$s_{p\pm} = Re \pm j Im \quad (7)$$

として実数部と虚数部に分けて考えてみると

$$Re = -\frac{\omega_0}{2Q} \quad (8)$$

$$Im = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2} \quad (9)$$

となります。

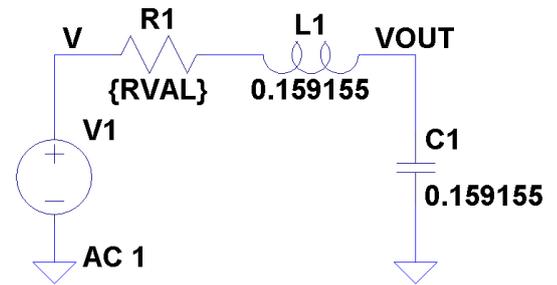
極が与えられたときに Q は

一方で式(5)の解の公式で極が与えられたときは、その実数部をとって

$$Q = -\frac{\omega_0}{2Re} \quad (10)$$

として Q を得ることもできます。

.ac dec 100 0.1 10



.step param RVAL LIST 0.25 0.333 0.5 1 1.414 2

図 2. RLC 型 2 次 LPF 回路（TNJ-044 の図 4 を再掲）

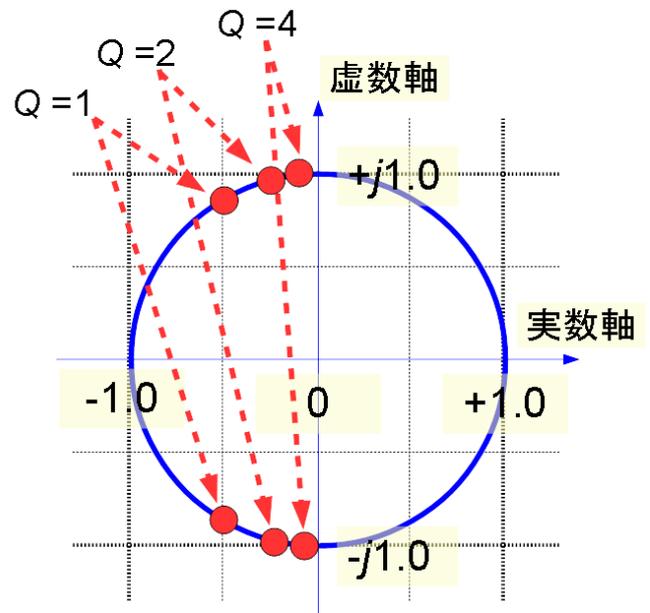


図 3. 極の位置を複素数平面上（実際はラプラス平面上）に表してみる。 $\omega_0 = 1$ としている

極の Q ごとによる複素数平面上の角度は

この $s_{p\pm}$ の位置を複素数平面上（実際はラプラス平面上）に表してみると、図 3 のように表記することができます。この図では $\omega_0 = 1$ として、 $Q = 1, 2, 4$ の 3 条件で作画してみました。

$s_{p\pm}$ の位置は、すべて「中心から半径 ω_0 の位置（この図では $\omega_0 = 1$ ）」であり、また Q が大きくなってくると、縦軸に近づいていくことが分かります。

ちなみに、複素数平面の中心から極への、横軸をゼロとしたときの角度 θ_{\pm} は

$$\begin{aligned} \theta_{\pm} &= \arg(s_{p\pm}) = \tan^{-1} \frac{\pm \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2}}{-\frac{\omega_0}{2Q}} \\ &= \tan^{-1} \left(\mp \sqrt{4Q^2 - 1} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

となります。 $\arg(x)$ はカッコ内 x の位相角を意味します。また

$$|s_{p\pm}| = \omega_0 \quad (12)$$

なので

$$Re = -\frac{\omega_0}{2Q} = |s_{p\pm}| \cos \theta_{\pm} = \omega_0 \cos \theta_{\pm} \quad (13)$$

というオイラーの公式の考え方から、

$$\begin{aligned}
 -\frac{\omega_0}{2Q} &= \omega_0 \cos \theta_{\pm} \\
 -\frac{1}{2Q} &= \cos \theta_{\pm} \\
 Q &= -\frac{1}{2 \cos \theta_{\pm}}, \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta_{\pm} \leq \frac{3\pi}{2}\right) \quad (14)
 \end{aligned}$$

という関係も得ることができます。

パラメータ ω_0 と Q が得られればサレン・キー2次LPFを構成できる

ここまで分かればアクティブ・フィルタを設計できます。

- ① 任意の分母多項式によるカーブが与えられたとき
- ② それは因数分解することができ、1次式と2次式の乗算になる
- ③ その2次式の部分をサレン・キー型などのアクティブ・フィルタで作りたい

とすれば、この2次式の部分は、解の公式で極 $s_{p\pm}$ を得れば、

- ω_0 を式(6)で、 Q を式(10)で計算できる
- パラメータ ω_0 と Q が分かれば、その特性を有するRLC型2次LPFのRLC定数を式(1)と式(2)から計算できる
- ただし直流で伝達関数 = 1 になるように2次式を ω_0^2 倍してゲインをスケールする必要がある (以降のTNJ-047に示す)
- そのRLC型2次LPFと等価なアクティブ・フィルタとして、サレン・キー型フィルタを構成すればよい

わけです。そして、それらをカスケード(従属)に接続(掛け算)していけば、任意の分母多項式で表されるカーブの特性を有するLPFを形成することができるわけですね。

この「等価なサレン・キー型フィルタ」の作り方は以降の技術ノートTNJ-048で詳しく考えていきます。

以上で今回の技術ノートはおしまいです…。あいや、まあ、ここまで分かればよいわけですが、さらに細かくこの2次式のようなすをみてみましょう。

2次LPFの振幅特性と位相特性を「極」の視点でより深く考えてみる(従属接続となったふたつの1次伝達関数のうちひとつを考える)

図2のLPFの伝達特性、もっと簡単な言い方をすると「振幅特性」と「位相特性」について考えてみたいと思います。

図2を式として表したものが式(3)であり、これを用いて直球勝負で振幅特性と位相特性を計算することもできます。当然ながらそれが一般的な解法ではあります…。

しかしここでは、これらの特性を「極」の視点で考えてみたいと思います。

伝達関数としてはふたつの1次伝達関数の従属接続

あらためて式(4)を再掲します。

$$\frac{V_{OUT}}{V} = H(s) = \frac{\omega_0^2}{(s - s_{p+})(s - s_{p-})} \quad (4 \text{ 再掲})$$

ここまでこの式は、ふたつの共役複素数の極をもつRLC型LPF回路の伝達関数だと説明してきました。これをもう少し分解してみます。上記の式を

$$H(s) = \frac{\omega_0}{s - s_{p+}} \cdot \frac{\omega_0}{s - s_{p-}} \quad (15)$$

とすれば、ふたつの伝達関数 $H_+(s)$ と $H_-(s)$ の積として

$$H(s) = H_+(s) \cdot H_-(s) = \frac{\omega_0}{(s - s_{p+})} \cdot \frac{\omega_0}{(s - s_{p-})} \quad (16)$$

と表すことができます。さらにこれをブロック図として表すと、図4のように「ふたつの1次伝達関数の従属接続」だと表すことができます。なおこのそれぞれは、極が複素数になる2次LPFの一部ではありますが、現実の回路として作ることはできないものです。

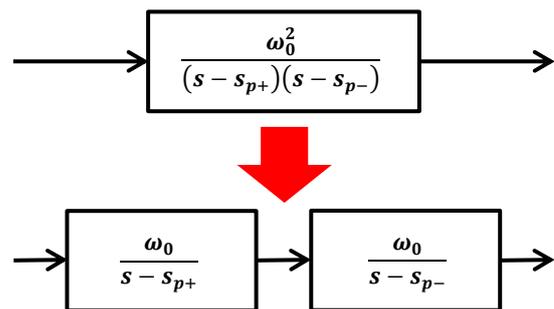


図4. ふたつの極をもつ2次伝達関数をふたつの1次伝達関数の従属接続に分解する

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-046

極を「ベクトル」と考えてみる

s_{p+} と s_{p-} は共役複素数として表される式(4)の伝達関数の極でした。複素数であることから(大きさと位相があるから)、図5のようにこれらは「ベクトル」とも考えることができます。

なおこの図5では $Q = 1$ として極の位置をプロットしています。

ひとつの1次伝達関数に着目して振幅特性と位相特性を考えてみる

ここでさらに図4のひとつの1次伝達関数に着目して、この「ひとつの1次伝達関数」の振幅特性と位相特性を考えてみましょう。式(16)の2つめのカッコの中

$$H_-(s) = \frac{\omega_0}{s - s_{p-}} \quad (17)$$

だけを抜き出してみます。

あらためて $s = j2\pi f = j\omega$ と考えてください。最初の技術ノートTNJ-044からここまで説明したように、ここでも「 $j2\pi f$ と表すのが面倒なので s としている」、「 s なんて使っているが、数学の普通の記号 x と同じだ(ちょっとこれは乱暴ですが)」というくらいにざっくり考えていただいてもかまいません。

ここでは $s = j2\pi f = j\omega$ としようとして、 s つまり周波数 f を変化させたときに、 $H_-(s)$ がどのようなか考えます。これを図6に示します。

s (つまり周波数 f の変化)は、図6のように虚数軸上を下から上に移動することになります。なぜなら $s = j2\pi f$ で、周波数 f に対して虚数単位「 j 」がついているからです。

いっぽう s_{p-} は図6の左下の点、それも中心から距離(絶対値 | ノルム)として ω_0 だけ離れた点にプロットされます。 $\omega_0 = 1$ なので距離1のところになります。またこの例では $Q = 1$ としています。

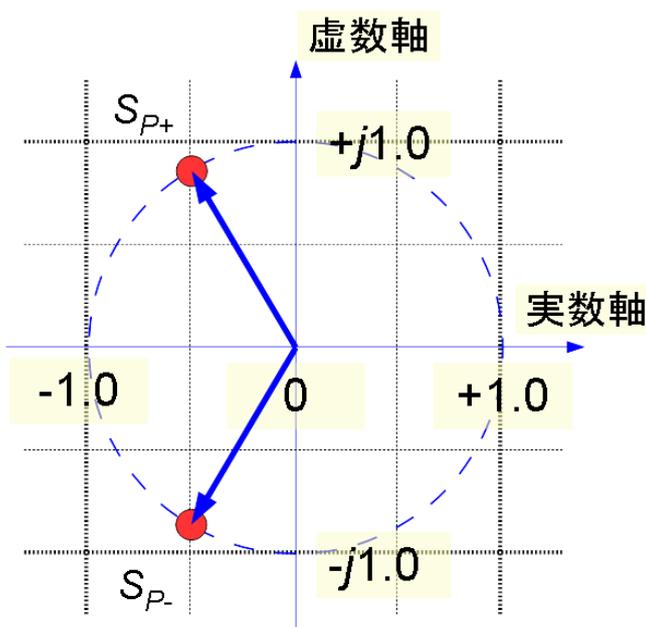


図5. s_{p+} と s_{p-} は複素数なのでベクトルだと考えることもできる

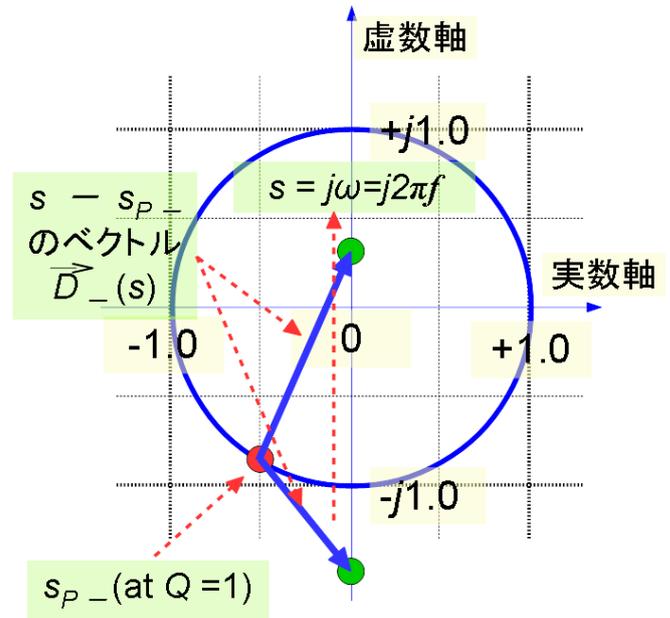


図6. s つまり周波数 $j\omega = j2\pi f$ の変化は虚数軸上を下から上に移動する($Q = 1$ としている)

複素数平面上のベクトルと考える

ここで s と s_{p-} の $(s - s_{p-})$ を図6の青い矢印のように

$$\vec{D}_-(s) = s - s_{p-} \quad (18)$$

ベクトル $\vec{D}_-(s)$ だと考えます。図5で極 s_{p+} 、 s_{p-} をベクトルで表しました。 $(s - s_{p-})$ についても大きさと位相がありますから、ベクトルで表すことができます。ここで $\vec{D}_-(s)$ の (s) は s の関数、つまり「縦軸を変化していく周波数 f ごとで考えている($s = j2\pi f$ だから)」という意味合いを示しています。

こうするとこのベクトルの長さ $|\vec{D}_-(s)| = |s - s_{p-}|$ が式(17)の分母の大きさとなり、伝達関数 $H_-(s)$ の振幅伝達特性が

$$|H_-(s)| = \frac{\omega_0}{|s - s_{p-}|} = \frac{\omega_0}{|\vec{D}_-(s)|} \quad (19)$$

として得られることに気がつくと思います。また位相特性についても、 $\vec{D}_-(s)$ の実数軸からの角度として、

$$\begin{aligned} \arg[H_-(s)] &= \frac{1}{\arg(s - s_{p-})} = \frac{1}{\arg[\vec{D}_-(s)]} \\ &= -\arg(s - s_{p-}) = -\arg[\vec{D}_-(s)] \end{aligned} \quad (20)$$

この式がイメージできないときは

「式(17)のイメージができない」いう方もいるでしょう。さきほど $s = j2\pi f = j\omega$ と考えました、そうすれば式(17)は

$$\begin{aligned} H_-(f) &= \frac{\omega_0}{j2\pi f - s_{p-}} = \frac{\omega_0}{j2\pi f - (Re - jIm)} \\ &= \frac{\omega_0}{-Re + j(2\pi f - Im)} \end{aligned} \quad (21)$$

として周波数 f の関数に書き換えることができます。こうすれば(少しは?) 分かり易くなるのではないかと考えます。

この図6については、 s (角周波数 ω | 周波数 f)を変化させていくわけですから、図7のように s_{p-} の位置をベクトルの基準として考えれば、より腑に落ちる感じが出てくるのではないのでしょうか。

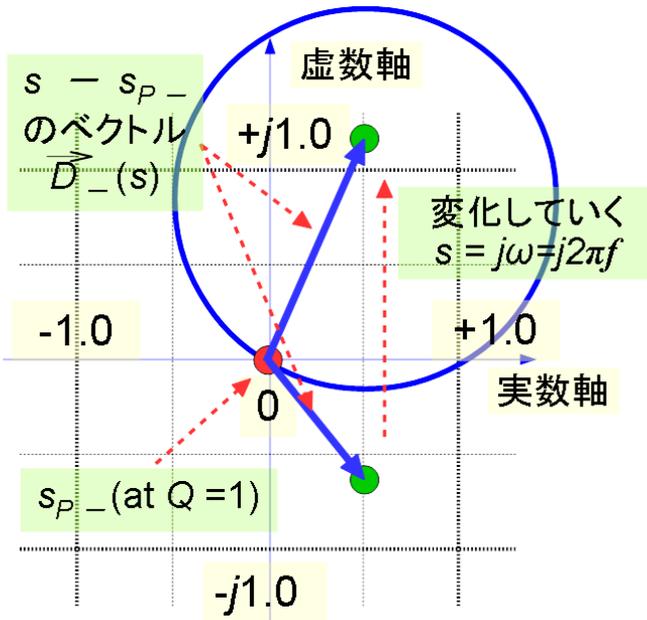


図7. 図6の s_{p-} の位置をベクトルの基準として、ベクトルの先端が $s = j\omega$ だとして考えるとベクトル表記が腑に落ちる ($Q = 1$ としている)

まとめ

伝達関数の周波数特性は極と観測角周波数との間のベクトルに関して表される

今回の技術ノートでは、 $Q > 0.5$ の条件のときの分母多項式の根、つまり極が複素数のとき、それを複素数平面で表すとどうなるかを説明しました。そしてそれぞれの極をベクトルとして考えていくと、「伝達関数/フィルタ特性もベクトルが変化していくようすとして考えられる」ということをお話しました。つまりこれは、伝達関数の周波数特性が、極と観測角周波数との間のベクトルに関して表されるということです。

次のTNJ-047では、極とフィルタの伝達特性がどのように関係しているかについて、具体的にグラフ上にプロットして検討してみます。

参考文献

[1] 柳沢 健, 金光 馨; アクティブフィルタの設計, 1973年, 株式会社産報 (絶版)