ANALOG DEVICES

TNJ-028

アナログ電子回路技術ノート

トランスのM結合とはナニモノでどのように測るか
（前編：理論とシミュレーション）

著者: 石井 聡

はじめに

どうでもいい話しですが「はかる」もいろんな漢字がありますね。「計る、図る、測る、諮る、謀る…」。日本語は難しいです。

さて、「トランス」。あまりなじみの無い方も多いかと思いますが、最近は電源回路だけではなく、差動信号などでの設計・応用もあります。そのためトランスも電源エンジニアだけのものではない、多くの方々に関係する話題といえるのではないでしょうか。実際問題としては（当然ながら）、「最近」というわけでもありませんね。

そのトランス。一次、二次の自己インダクタンスL_1, L_2、そして相互インダクタンスMはどうやってハカレばよいでしょうか。この（三部作の前編となる）技術ノートでは、それらをハカる方法の理論的な側面を説明し、そして ADIsimPE を用いて、シミュレーションで測定方法を検証してみたいと思います。

一つ前の技術ノート TNJ-027 では、デジタル・アイソレータのトランスと 100 万 V のトランスをご紹介しましたが、次のこの技術ノートでも、続いて、同じく「トランス」です（笑）。

図 1. トロイダル・コア活用百科

名著中の名著と呼ばれる・・・

図 1 は「名著中の名著」とも呼ばれる「トロイダル・コア活用百科（CQ 出版社）です。絶版になりましたが、現在は「改定新版」が別に発売されています。

1983 年初版とのことですが、私は一体いつごろに買ったことやら…。キレイな表紙をお見せするのが格好良い記事（技術ノート）でしょうが、このようなぼろぼろになった書籍をお見せするのもエンジニアとしてのリアル感があり、「一興」だともいえるでしょう。「ぼろぼろ」のとおり、かなりのところを読んで参考にさせてもらいました。それでもまだ読みきれていないところがあるというのも面白い話です（ページ数もかなりあるため）。

相互インダクタンス M とは？

まずは自己インダクタンス L から…

自己インダクタンスL（単位はヘンリー[H]）は、図 2 のように、電流Iの変化に対してインダクタの両端でどれほどの電圧V_{EMF}（起電力; electromotive force, EMF）が生じるかを表す数値です。式で表してみると

$$V_{EMF} = L\frac{dI(t)}{dt}$$

$dI(t)/dt$は電流Iの時間変化です。この式は「電圧降下」として考える極性で起電力V_{EMF}を表記していますので、符号はプラスですが、本来の「起電力」として考えるのであれば（電圧源の電圧と電流の極性で考えるのであれば）符号はマイナスになります。

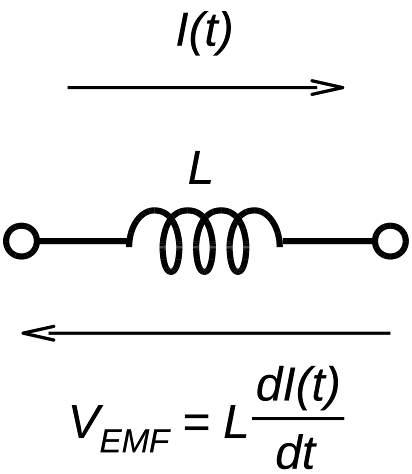

図 2. インダクタに流れる電流変化で起電力が生じるが
この生じる量の係数が自己インダクタンス

Rev. 0

アナログ・デバイセズ株式会社
本　　社／〒105-6891 東京都港区海岸 1-16-1 ニューピア竹芝サウスタワービル
電話 03（5402）8200
大阪営業所／〒532-0003 大阪府大阪市淀川区宮原 3-5-36 新大阪トラストタワー
電話 06（6350）6868

$I(t)$は過渡変化であればいろんな形になるでしょうが、一般的には定常状態として

$$I(t) = I\ \cos(\omega t)$$

ここでωは角周波数（$\omega = 2\pi f$）で、このような波形を加える（考える）ことが一般的でしょう。コサインが微分されるわけですから、

$$\frac{dI(t)}{dt} = -I\ \omega \sin(\omega t)$$

となり、これを最初に式に代入してみると

$$V_{EMF} = -LI\ \omega \sin(\omega t)$$

となり、$-\sin(\omega t)$は$\cos(\omega t)$に対して 90 度位相が進んでいますから、$-\sin(\omega t) \to j$〔$= \exp(j\pi/2)$〕としてみると

$$V_{EMF} = j\omega LI$$

となり、よく見る式に変形することができます。

つづいて相互インダクタンス M とはナニモノ…

相互インダクタンスの記号Mは、英語の「Mutual」という単語から来ています。

「Mutual といえば…」というわけではありませんが、弊社はお客様と秘密保持契約（NDA; Non Dislosure Agreement）を締結させていただき、新規開発品のご紹介ですとか、共同開発などを行っています。アナログ・デバイセズでのこの NDA のタイトルが、

MUTUAL NONDISCLOSURE AGREEMENT

として、「相互に」という意味で「Mutual」という単語が使われています。相互インダクタンスも同じイメージです。

さて、自己インダクタンスは「インダクタ自ら（自己）」に流れる電流Iの変化に対して生じる電圧V_{EMF}なわけですが、相互インダクタンスM（単位は自己インダクタンスと同じく、ヘンリー[H]）は、図 3 のように二つの電線（もしくはインダクタ／コイル／トランスの巻線）の間で生じる相互作用で、一本の電線に電流Iが流れていると、もう一方の電線の両端に生じる電圧V_{EMF}を

$$V_{EMF} = M\frac{dI(t)}{dt}$$

として表せるものです。一般的な定常状態として考えると、

$$V_{EMF} = j\omega MI$$

となります。「電流によって起電力が生じるが、その度合いが、自分ならL、他人ならM」と考えてしまえばよいでしょう。

ということで定義は分かりましたが、自己インダクタンスと相互インダクタンスの間には「結合係数 k」という関係があります。このあたりを、この技術ノートでは解きほどいていきたいと思います（…この歳で今更気づいたことですが、「とき＝解き」で、また「ほどく＝解く」ですが、「ときほどく＝解き解く」とはほとんど書かないですね…）。

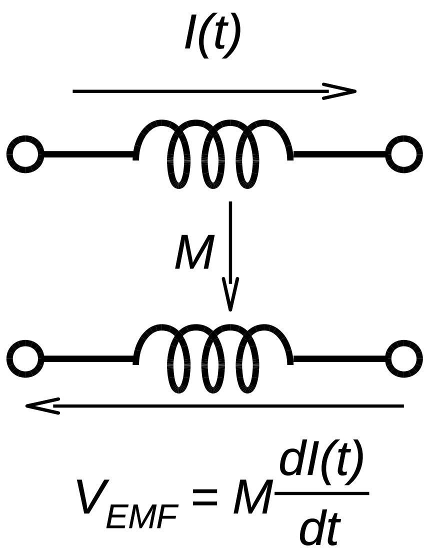

図 3. 一本の電線に流れる電流変化で、もう一方の電線に起電力が生じる係数が相互インダクタンス

自己インダクタンスと相互インダクタンスとの関係を解きほどく

図 4 はトランスを解体したものです。トランスは一次側に電圧V_1を加えれば二次側に電圧V_2が生じるというものです。一次側、二次側ともども「マキモノ（巻き物）」ですから、自己インダクタンスL_1, L_2があろうこと、また相互に結合しているので相互インダクタンスMもあろうことが想像できるでしょう。

トランスの二次側に電圧V_2が生じるしくみは、相互インダクタンスがなければ成り立たないことも気がつきます。図 3 で示したように「相互インダクタンスは二つの電線（もしくはインダクタ／コイル／トランスの巻線）間の相互作用で、一本の電線に流れる電流Iの変化により、もう一方の電線の両端に電圧V_{EMF}が生じる」というものなわけですから。

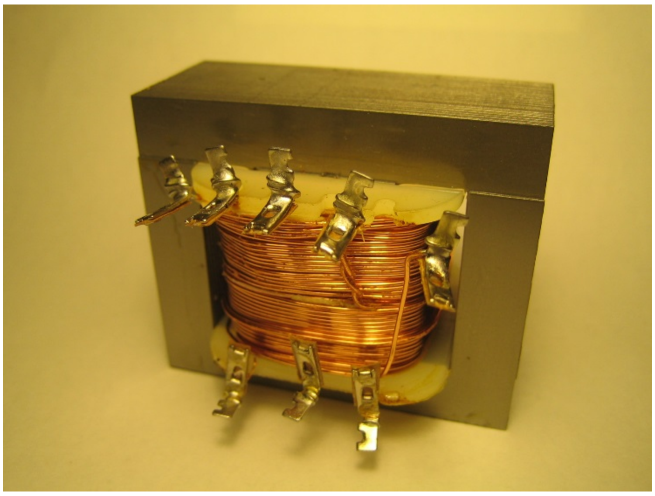

図 4. トランス。一次側巻線と二次側巻線が同じコアに巻きつけられている。電線のマキモノなので自己インダクタンスと相互インダクタンスそれぞれがありそうだ

このトランスのL_1, L_2, Mを、等価回路として表したものが図 5 になります。これは一般的に、よく用いられるトランスの等価回路です。相互インダクタンスMは

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

として表されます。ここでkは一次・二次間の結合度で、「結合係数」といいます。式変形してみると、

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

となることが分かります。

なぜ結合係数なるものが必要なのか（生じるのか）

それではなぜ、このような一次・二次間の結合度や結合係数を定義する必要があるのでしょうか。

図 6 に示すように、トランスなどでは一次巻線で生じた磁束がすべて二次巻線の領域内を通り抜けず、漏れとなる磁束の量ができてしまいます。ファラデーの電磁誘導の法則のとおり、コイルに誘起する電圧（起電力）は、そのコイルのループの中を通る変動磁界量（より電磁気学的には「鎖交磁束」と呼びます）に比例します。一次巻線で生じた磁束の一部が、このループ内を通らないのであれば、それは二次巻線の起電力として影響を与えないことになります。

これが「漏れ磁束」で、図 5 においては$L_1 - M, L_2 - M$で表されます。「漏れ磁束」を考慮するため、結合係数が必要なのです。

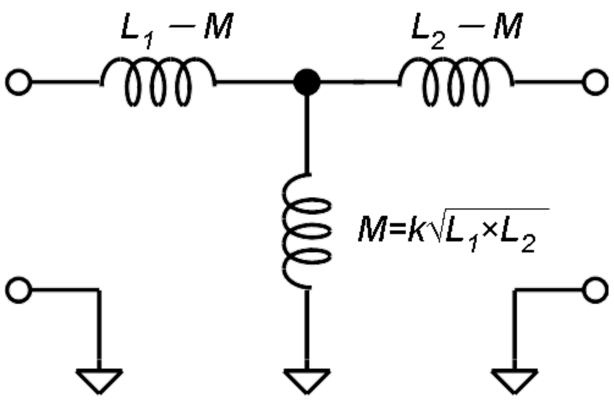

図 5. 結合係数もふくめたトランスの等価モデル

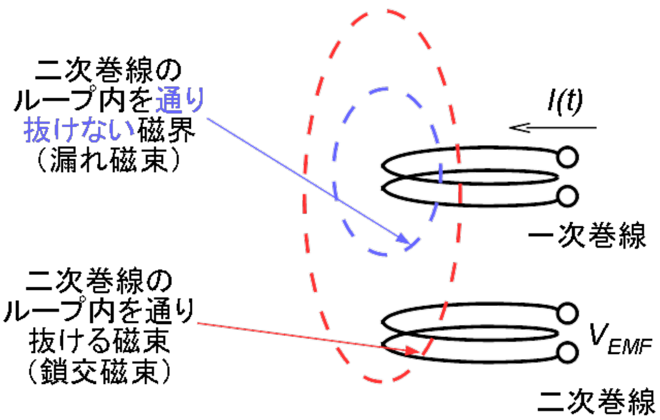

図 6. トランスでの漏れ磁束により結合係数が 1 以下になる

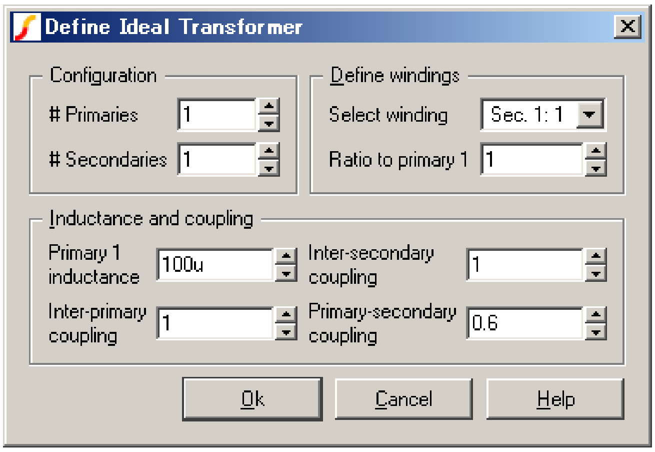

図 7. シミュレーションでみてみるトランスの回路パラメータ

シミュレーションで答えを得る前準備（シミュレータでの各種定義）

それではアナログ・デバイセズの SPICE シミュレータ ADIsimPE を使ってシミュレーションをしてみましょう。

図 7 はシミュレーションでのトランスのパラメータです。パラメータのなかみを少し詳しく説明しておきましょう。

Configuration の# Primaries, # Secondaries は一次側（Primaly）と二次側（Secondary）に、それぞれある巻線の数（#は Number という意味があります）です。ここではそれぞれ 1 巻線ずつなので、1 になっています。

その右の Define windings は、値を入力したい巻線を選択します。Select winding が Sec. 1:1 になっていますが、ここはプルダウンで選ぶことができます。つづいて選択された巻線（図 7 の表示状態では二次側の巻線）の巻数比を Ratio to primary 1 として、一次巻線の 1 番目の巻線数との比で設定します。このシミュレーションの条件では、一次側と二次側は同じインダクタンス（巻数）なので 1 としてあります。

これまでの説明自体もちょっとややこしいですが、図 7 の設定ではそれぞれ 1 巻線ずつなので、実際はあまり気にしなくてもよいでしょう。

下の Inductance and coupling の Primary 1 inductance で、一次巻線の 1 番目（このシミュレーションの設定では 1 巻線しか無い）のインダクタンスを設定します。ここを 100µH に設定することで、またさきの Ratio to primary 1（巻数比）を 1 に設定することで、一次の自己インダクタンスL_1と、二次の自己インダクタンスL_2をそれぞれ 100µH に設定することができます。なお全ての巻線のインダクタンスは、インダクタンスL_1からの相対値（巻数比）になります。

Inter-primary coupling と Inter-secondary coupling は（複数巻線を設定したときの）一次巻線内、二次巻線内での結合係数を示しています。繰り返しますが、それぞれ 1 巻線ずつなので 1 にしておけば、あまり気にしなくてもよいでしょう。

Primary-secondary coupling がこの技術ノートでのキモの「結合係数」です。ここを 0.6 とすることで、結合係数 $k = 0.6$ としてみました。

シミュレーションでは、「L_1, L_2は定義されているが、（0.6 と設定した）結合係数 kが未知」だとして、相互インダクタンスMを求めてみたいと思います。

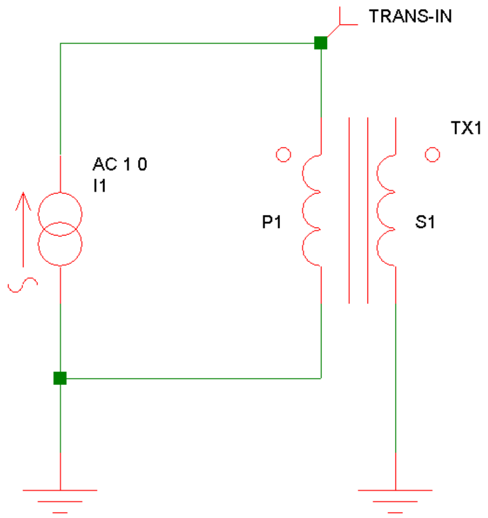

図 8. L1 を求めるシミュレーション用の回路

実際にシミュレーションしてみる

自己インダクタンスをシミュレーションで求めてみる

まずシミュレーションにより、図 7 で設定したトランスの自己インダクタンスを求めてみます。

図 8 は実際のシミュレーション回路です。トランスの二次側は開放にします。それでも片側をグラウンドに落としていますが、これは ADIsimPE でシミュレーションを行う際に、

```
Errors found during the run. Simulation aborted
 *** ERROR *** Singular matrix
This may be due to a floating node or a loop
of voltage sources and/or inductors.
```

となるエラーを抑制するためです。二次側が開放でフロートのままだと、DC 動作点を決められないということですね。

つづいて具体的なシミュレーションから計算への考え方です。トランスの一次、二次に流れる電流をI_1, I_2とすれば、一次に誘起する電圧V_1は

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 \pm j\omega M I_2$$

となります。二次側が開放であるため $I_2 = 0$ であり、相互インダクタンスMにより誘起する電圧分はありません。こうすると、

$$V_1 = j\omega L_1 I_1$$

が得られます。なおシミュレーションでは $I_1 = 1\text{A}$ としています。そうすればリアクタンスX_Lがそのまま電圧値V_1として、

$$X_L = V_1 = j\omega L_1$$

で得られることになります。

AC シミュレーションでシミュレーションしてみました。信号源を 1A として周波数スイープさせ、トランスの端子電圧を求めてみます。図 9 のようにマーカでてみると、1MHz で 628.319V と答えが得られます。上記の式のとおり、得られた電圧値がそのままリアクタンスX_Lになることから、$\omega = 2\pi f$, $f = 1\text{MHz}$ とすると、

$$L_1 = 100.00007\mu\text{H}$$

とみごとにL_1の大きさが得られることが分かります。

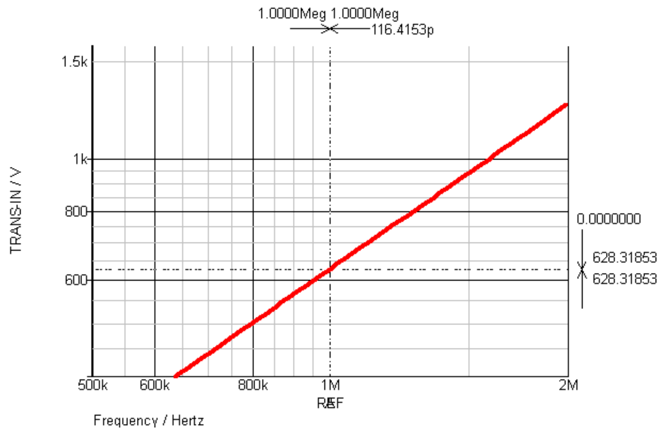

図 9. L1 を求めるシミュレーションの結果

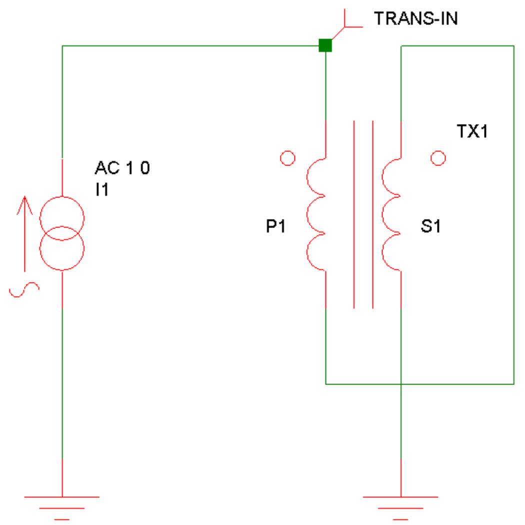

図 10. 相互インダクタンス M を求めるための
シミュレーション用の回路「その 1」

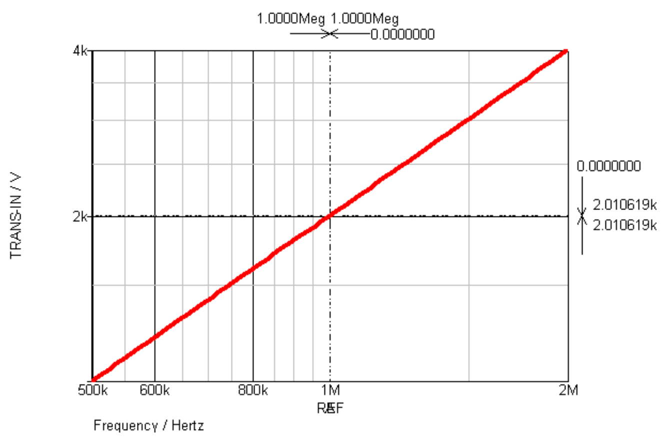

図 11. 図 10 のシミュレーションの結果。これは何を意味する？

接続を変えてシミュレーションしてみる（その 1）

次は相互インダクタンスMを求めてみるために、一次側と二次側を図 10 のように接続します。ここでは同じ電流量（1A）が一次巻線と二次巻線に流れます。

図 11 のようにマーカでみてみると、1MHz で 2010.619V と得られます。上記の式から$\omega = 2\pi f$, f = 1MHz とすると、

$$L_{CN1} = 320\mu\text{H}$$

と計算できます…。しかし一体これは何を見ているのでしょうか。

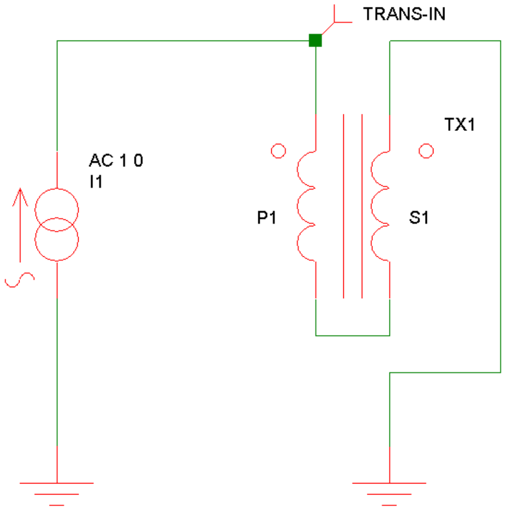

図 12. 相互インダクタンス M を求めるための
シミュレーション用の回路「その 2」

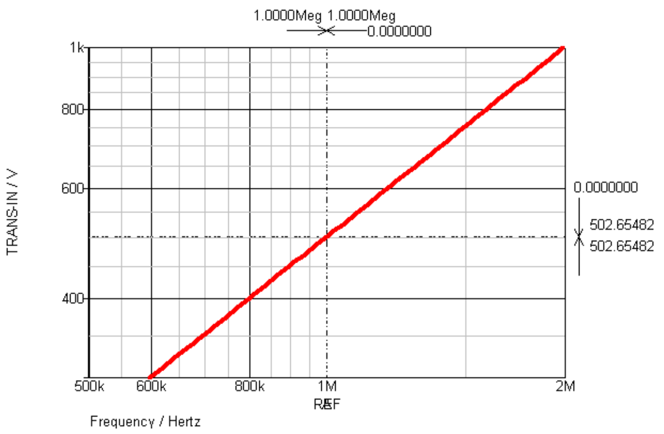

図 13. 図 12 のシミュレーションの結果。これも何を意味する？

接続を変えてシミュレーションしてみる（その 2）

つづいて一次側と二次側を図 12 のように接続します。先ほどとは電流の流れる向きが一次／二次間で逆になります。流れる電流量は一次巻線と二次巻線では同じ（1A）です。

図 13 のようにマーカでみてみると、1MHz で 502.655V と得られます。上記の式から$\omega = 2\pi f$, f = 1MHz とすると、

$$L_{CN2} = 80\mu\text{H}$$

と計算できます。接続する向きを変えるだけでインダクタンスが変わりますね。

これらが相互インダクタンスMの大きさを求めるための基本になります。

シミュレーション結果から相互インダクタンスを計算してみる

ここまでの、それも後半の二つのシミュレーションで、二つのインダクタンス値を求めてきました。

$$L_{CN1} = 320\mu\text{H}$$

$$L_{CN2} = 80\mu\text{H}$$

というものです。

トランスのそれぞれの巻線で誘起する電圧は

$$V_1 = j\omega(L_1 I_1 \pm M I_2)$$

$$V_2 = j\omega(L_2 I_2 \pm M I_1)$$

なわけですが、ここでは同じインダクタンスかつ同じ電流量なので、$L_1 = L_2 = L, I_1 = I_2 = I$とすることができ、

$$V = j\omega(L \pm M)I$$

と一般化できます。さらに図 10 と図 12 では、一次／二次が直列に接続されているので、図 10 のケースでは、

$$L_{CN1} = (L + M) + (L + M) = 2L + 2M$$

が得られ、図 12 のケースのように電流の向きを逆にして結線した場合では、

$$L_{CN2} = (L - M) + (L - M) = 2L - 2M$$

が得られます。これらを用いて計算してみると、まずそれぞれの値の引き算

$$L_{CN1} - L_{CN2} = 4M = 240\mu\text{H}$$

から、M = 60μH が得られることになります。さらにそれぞれの値の足し算

$$L_{CN1} + L_{CN2} = 4L = 400\mu\text{H}$$

から、L = 100μH が得られることになります。

結合係数がk = 0.6 ですから

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

の式からM = 60μH というのも、つじつまがあっていますね。

ここではシミュレーションにより相互インダクタンスを求めてみましたが、実測でも同じように求められることもお分かりいただけるかと思います。これは三部作の後編（TNJ-030）で実際に実測してみたいと思います。

結合係数が高いケースでの漏れインダクタンスの簡易測定方法

結合係数が高いケースでの漏れインダクタンス（$L_1 - M$）もしくは（$L_2 - M$）の求め方をご紹介しておきます。一次／二次が同じインダクタンスの場合の簡易的な測定方法です。

二次側をショートすると、一次側からは一次側の漏れインダクタンス（$L_1 - M$）と、相互インダクタンスMと二次側の漏れインダクタンス（$L_2 - M$）の並列接続とで、

$$L = \left(L_1 - M\right) + \left(L_2 - M\right) // M$$

が見えることになります。ここで結合係数が高ければ、

$$\left(L_2 - M\right) \ll M$$

となりますから、上記の式は

$$L = \left(L_1 - M\right) + \left(L_2 - M\right)$$

として簡略化することができます。一次／二次が同じインダクタンスなので、$L_1 = L_2$であるため、二次側をショートして一次側からのインダクタンスLを測定して 1/2 することで、漏れインダクタンス量を、

$$\left(L_1 - M\right) = \left(L_2 - M\right) = L/2$$

として簡略的に求めることができます。

インダクタンスを簡易的に測定する方法

ところで実験でインダクタンスLを簡易的に求めるには、交流信号源から適当な大きさの抵抗Rを経由してLにつなぎ、そのときの交流信号源の電圧V_Sと周波数（角周波数ω）、Lの端子電圧V_Lから、

$$\left(\frac{V_L}{V_S}\right)^2 = \frac{(\omega L)^2}{R^2 + (\omega L)^2}$$

というかたちで式を立て、変形し、

$$L = \frac{R}{\omega}\sqrt{\frac{\left(\frac{V_L}{V_S}\right)^2}{1 - \left(\frac{V_L}{V_S}\right)^2}}$$

とすればよいのです。といってもトランスの銅損や鉄損が見えてくる可能性も高いので、上記で得られた結果を鵜呑みにすることも注意が必要です。

まとめと関連する資料およびひきつづきの話題のご提供

トランスには相互インダクタンスというものが存在し、それが自己インダクタンスと「結合係数」でつながっていることをご説明しました。

またその相互インダクタンスと結合係数を求める方法についても、トランスを図 10、図 12 のように接続することで測定により得られることが分かりました。

説明はシミュレーションにより行いましたが、実測でも同様に値が得られることになりますので、このアイディアは多岐に活用いただけるものかと思います。

インダクタンス測定に関する関連資料

関連資料をご紹介しましょう

NF 回路設計ブロックさんのウェブサイトです。ここに登録することで、郵送で「LCR メータを用いた電子部品の測定」という冊子を送ってもらえます！

アジレント・テクノロジーさんの「インピーダンス測定ハンドブック」という 124 ページの大作です。URL は古いまま（分社前）のものですが、技術資料のサイトとしてまだアクティブなようです。

ひきつづき中編・後編へつながる話題

この前編では理論的な面と、それを確認するためのシミュレーション結果についてご説明しました。以下は、この技術ノートの続きとなる、中編・後編に関する話題です。

この検討を行っていた前後で、とあるトレーニング用に US 資料（パワーポイント）の翻訳を始めたのですが、そこに見慣れない用語がありました。サーチしてみると、とあるアメリカの小さな会社のことでした。

なんと！そのサイトを見てみると、本当に偶然ですが、そこでローコストな LC メータを発売しており、$120 + $12（シッピング費用）だったので、面白そうなので買ってしまいました！なおキットなら$99 です。キットで自作を楽しんでもいいのですが、キットを作る時間を取るならやるべきこともあり、完成品を購入してしまいました（汗）。とはいえ、なんとこのコストで 1%精度なのでした…。

※

中編（TNJ-029）と後編（TNJ-030）では、この LC メータの購入の顛末、そしてそのノウハウや関連情報のご紹介、さらにこの前編でお話した相互インダクタンスと結合係数を求める方法について、この LC メータを用いて実際に測定してみたようすなどをご紹介していきたいと思います。